Física Fundamental III

Cap. 23 – Lei de Gauss

Prof. Isaac Torres

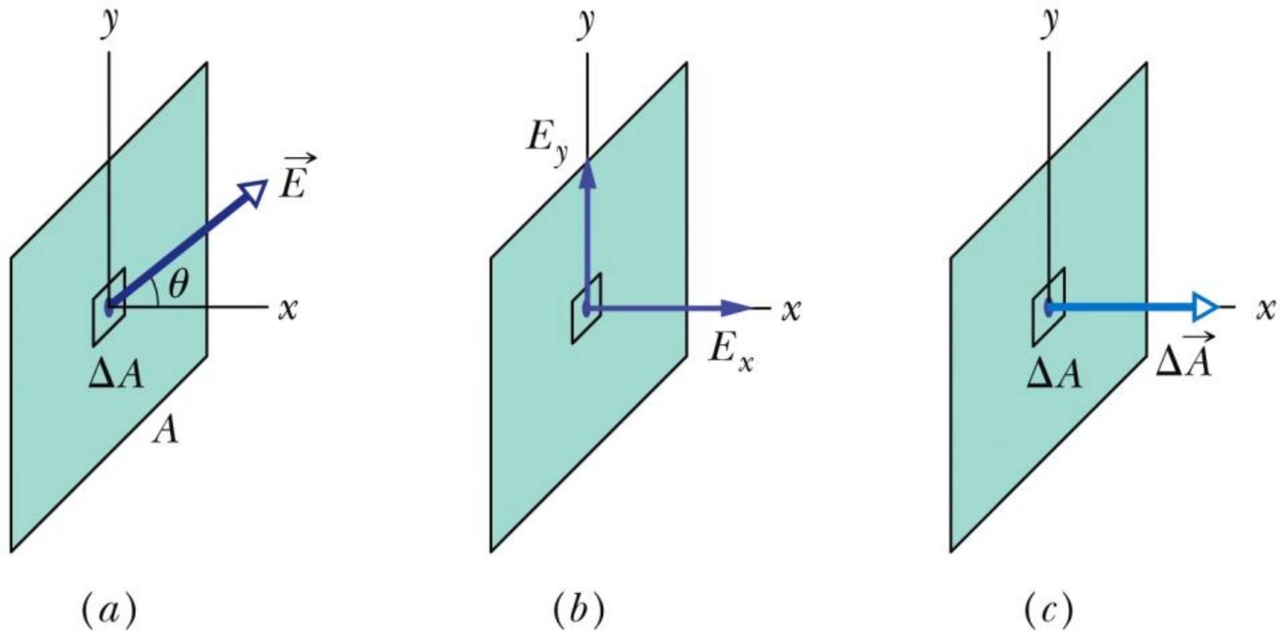
23-1

Fluxo Elétrico

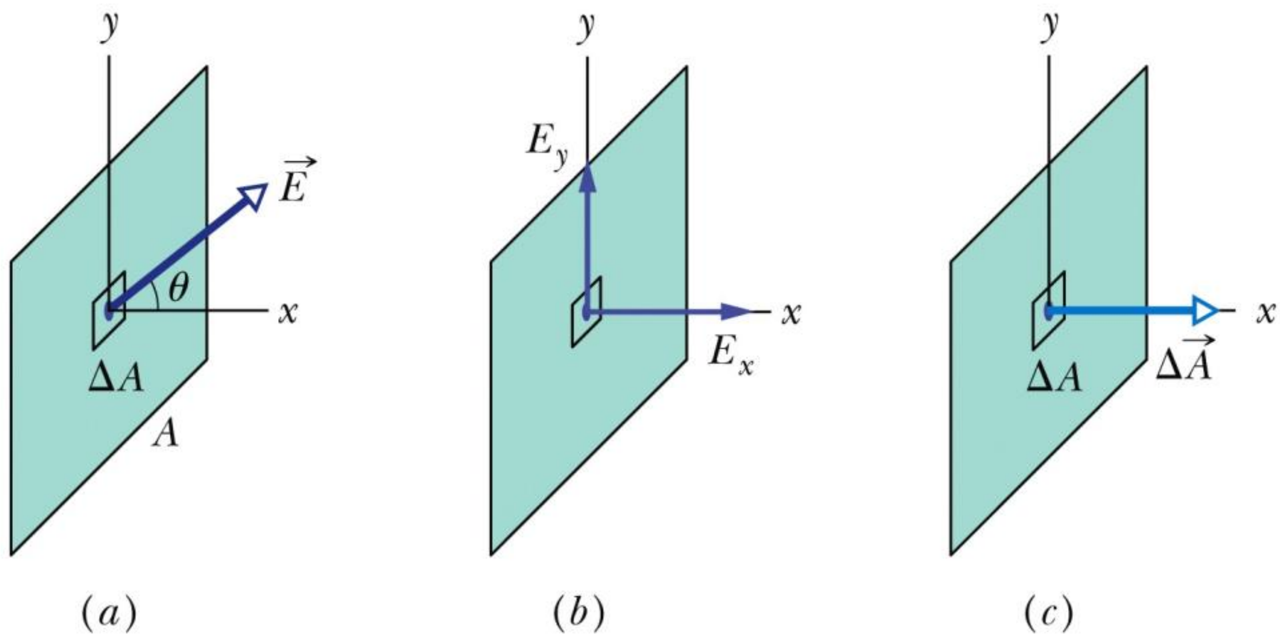
O Fluxo de Um Campo Vetorial

- O **vetor área** $d\vec{A}$ de um elemento de área é um vetor, perpendicular ao elemento, cujo módulo é igual à área do elemento.

- O **fluxo elétrico** $d\Phi$ através de um elemento de área com um vetor de área $d\boldsymbol{A}$ é dado pelo produto escalar.



O Fluxo de Um Campo Vetorial



- O Fluxo (inspirado pela dinâmica dos fluidos) vale:

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cos\theta \, dA$$

O Fluxo de Um Campo Vetorial

- O Fluxo Φ do campo vetorial $\vec{E}$ através da superfície S, que pode ser curva, é o limite da soma de todos os pequenos elementos de fluxo $d\Phi$, ou seja, é a integral:

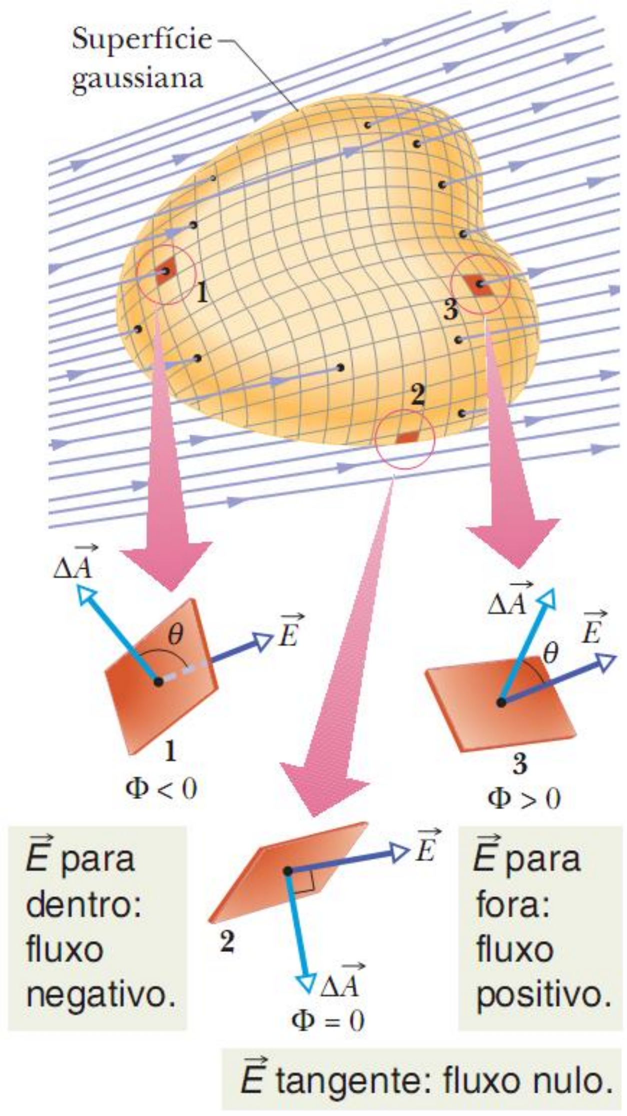
$$\Phi = \int_S d\Phi$$

- ou seja:

$$\boxed{\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A}}$$

- Se a superfície S for fechada, usamos a notação $\oint$:

$$\boxed{\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A}}$$



Como Calcular de Fato o Fluxo

1. Escrever a expressão do campo vetorial $\vec{E}$ em termos de vetores unitários.

2. Notar que o elemento de área $d\vec{A}$ é o produto do vetor $\hat{n}$ unitário orientado no sentido que se quer calcular o fluxo, perpendicular à superfície, pelo elemento de área escalar dA, que depende do sistema de coordenadas:

$$d\vec{A} = \hat{n}\, dA$$

3. Identificar as equações da superfície e substitui-las na expressão do campo.

4. Calcular o produto escalar $\vec{E} \cdot d\vec{A} = \vec{E} \cdot \hat{n}\, dA$.

5. Integrar o resultado ao longo da superfície.

Exemplos de elementos de área.

- Para superfícies retangulares contidas nos planos xy, yz ou xz, e orientadas nos sentidos *positivos* dos eixos, temos:

Plano da Superfície	Elem. de Área	Vetor Normal
xy	$dA = dx\,dy$	$\hat{n} = \hat{k}$
yz	$dA = dy\,dz$	$\hat{n} = \hat{\imath}$
xz	$dA = dx\,dz$	$\hat{n} = \hat{\jmath}$

- Para superfícies retangulares contidas nos planos xy, yz ou xz, e orientadas nos sentidos *negativos* dos eixos, temos:

Plano da Superfície	Elem. de Área	Vetor Normal
xy	$dA = dx\,dy$	$\hat{n} = -\hat{k}$
yz	$dA = dy\,dz$	$\hat{n} = -\hat{\imath}$
xz	$dA = dx\,dz$	$\hat{n} = -\hat{\jmath}$

Exemplos

1. Calcule o fluxo do campo $\vec{E} = (12x^3 - y^2)\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$ através do retângulo $2 \leq y \leq 6$, $-3 \leq z \leq 5$, no sentido positivo de x, situado no plano yz.

2. Calcule o fluxo do campo $\vec{E} = (12x^3 - y^2)\hat{\boldsymbol{\imath}}$ através do retângulo $2 \leq y \leq 6$, $-3 \leq z \leq 5$, no sentido negativo de x, situado no plano yz.

3. Calcule o fluxo do campo $\vec{E} = (7y - 6z^2)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ através do retângulo $0 \leq x \leq 4$, $3 \leq z \leq 10$, no sentido positivo de y, situado na altura $y = 5$.

4. Calcule o fluxo do campo $\vec{E} = (-x^4 - 3y + z)\widehat{\boldsymbol{k}}$ através do retângulo $4 \leq x \leq 11$, $2 \leq y \leq 8$, no sentido negativo de z, situado na altura $\mathrm{z} = -10$.

5. Calcule o fluxo do campo $\vec{E} = (-5y + 4z)\hat{\boldsymbol{\imath}} + (\ln y + 4/z^6)\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \cos(x + z)\,\widehat{\boldsymbol{k}}$ através do retângulo $2 \leq y \leq 6$, $-3 \leq z \leq 5$, no sentido positivo de x, na altura $x = 0$.

Exemplo: Fluxo Através de um Cilindro

A Fig. 23-6 mostra uma superfície gaussiana na forma de um cilindro oco, de raio R, cujo eixo é paralelo a um campo elétrico uniforme. Qual é o fluxo Φ do campo elétrico através do cilindro?

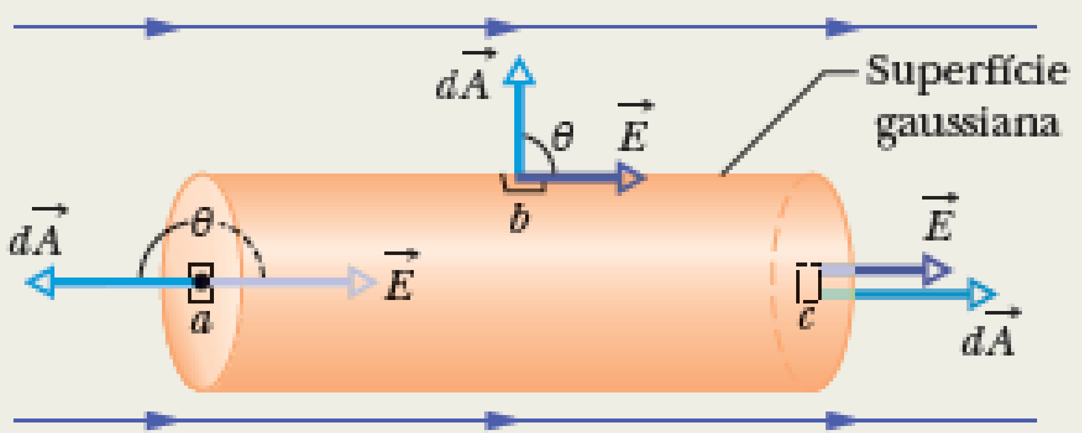


Figura 23-6 Uma superfície gaussiana cilíndrica, fechada pelos planos das bases, imersa em um campo elétrico uniforme. O eixo do cilindro é paralelo à direção do campo.

23-2
Lei de Gauss

Lei de Gauss

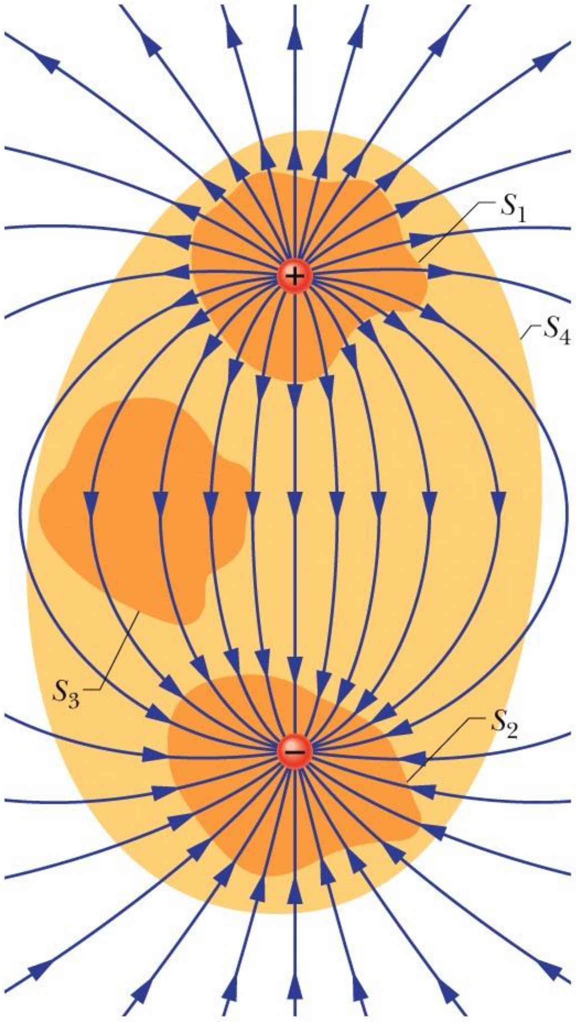
- Uma superfície fechada é chamada **superfície gaussiana**.

- A Lei de Gauss afirma que: o fluxo total do campo elétrico através de uma superfície gaussiana é igual à carga envolvida por essa superfície, representada por q_{env}, dividido por ε_0.

- Matematicamente:

$$\boxed{\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{env}}}{\varepsilon_0}}$$

- Esta é uma das 4 equações fundamentais do eletromagnetismo, as chamadas *Equações de Maxwell.*

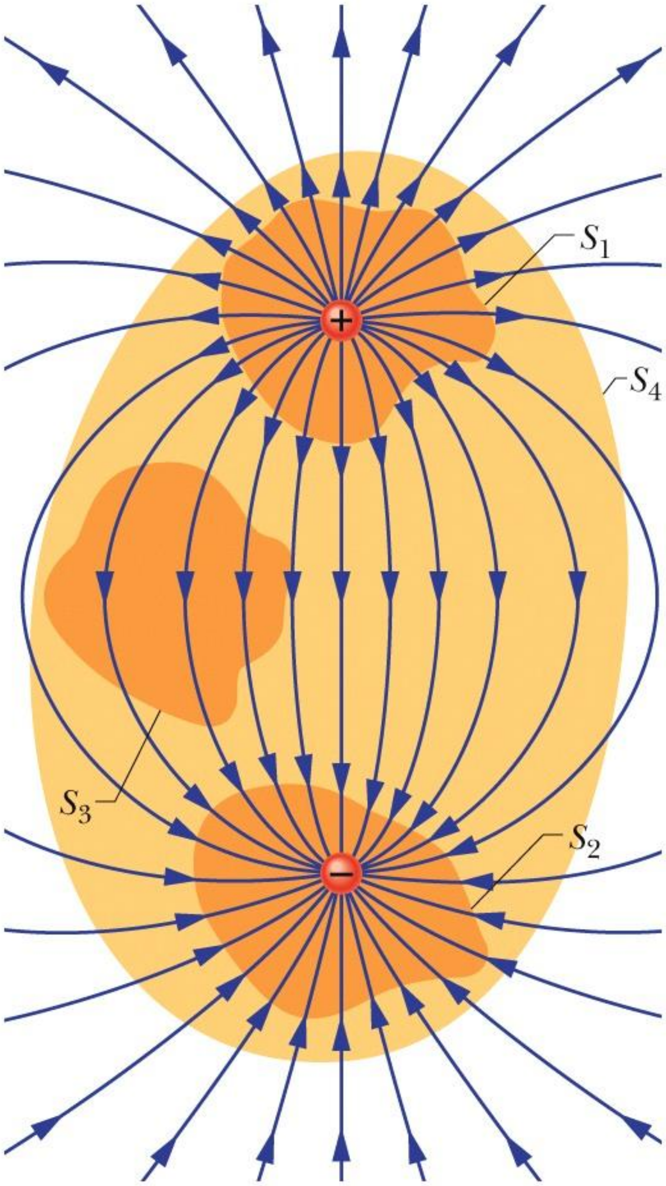


Exemplo

- Para as superfícies ao lado, considere que as cargas positiva e negativa valem, respectivamente:
- $q_+ = +2{,}47 \times 10^{-10} C$
- $q_- = -5{,}86 \times 10^{-9} C$

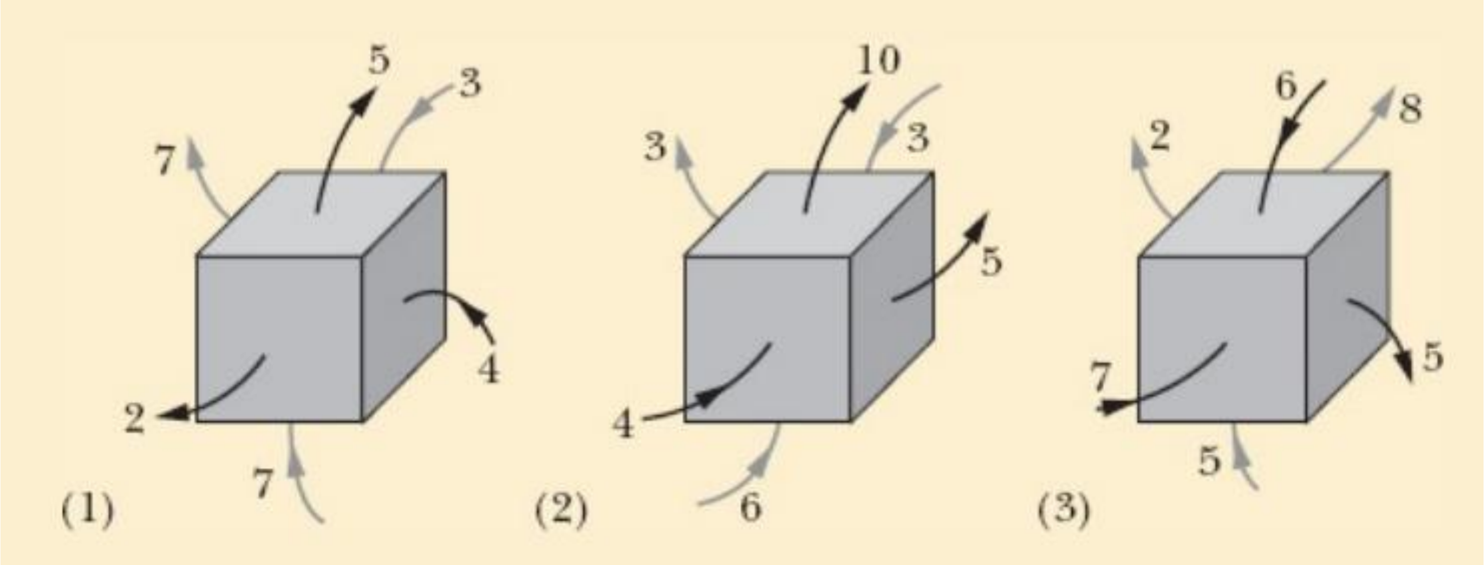
- Determine o fluxo de campo elétrico através das superfícies (unidade: Nm^2/C):

  a) S_1
  b) S_2
  c) S_3
  d) S_4



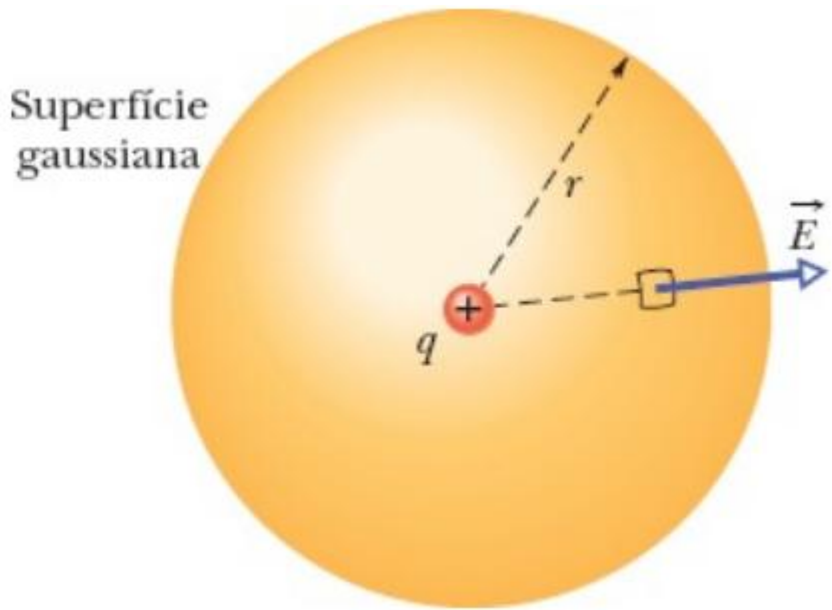
Exercício

- A figura mostra três situações nas quais um cubo gaussiano está imerso em um campo elétrico. As setas e valores indicam a direção das linhas de campo e o módulo (em Nm^2/C) do fluxo que atravessa as seis faces de cada cubo. (As setas mais claras estão associadas às faces ocultas.) Em que situação o cubo envolve:
    a) uma carga total positiva?
    b) uma carga total negativa?
    c) uma carga total nula?



Recuperando a Lei de Coulomb

- A partir da Lei de Gauss podemos recuperar a Lei de Coulomb.



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{env}}}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{E} = \frac{kq}{r^2}\hat{r}$$

Atividade

- Considere os Exemplos resolvidos do livro:

- **Exemplo 23.02**
- **Exemplo 23.03**
- **Exemplo 23.04**

- Leia atentamente e refaça os exemplos, calculando tudo detalhadamente, incluindo possíveis cálculos que o livro pulou.

- *Data de entrega:* **06/02**.

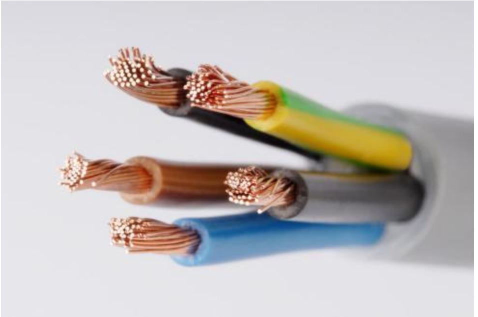
23-3

Um Condutor Carregado

Tipos Básicos de Material

- Os materiais podem ser de vários tipos, sendo os mais comuns:

- **Condutores:** permitem a passagem de corrente com facilidade.



- **Isolantes ou dielétricos:** armazenam carga, por ter dificuldade de permitir a passagem de corrente.



Campo em um Condutor Carregado

- Vamos analisar como fica o campo elétrico em um condutor, quando este condutor tem um excesso de carga, seja positiva ou negativa.

- Se o condutor está incialmente neutro ($q = 0$) ...

- ... ao se depositar carga nele, as cargas irão se distribuir (por ser condutor permite o movimento de cargas, que é a corrente), ...

- ... por isso, as cargas vão procurar o equilíbrio – vão se acomodar em posições fixas.

- Por esse motivo, temos a propriedade abaixo:

- **Propriedade 1.** O campo elétrico dentro de um condutor é zero.

Campo em um Condutor Carregado

- Como justificar?

- Se o campo dentro do condutor não fosse nulo, *provocaria o movimento perpétuo das cargas*, o que não acontece, elas atingem o equilíbrio.

- A única possibilidade restante é que o campo no interior seja zero.

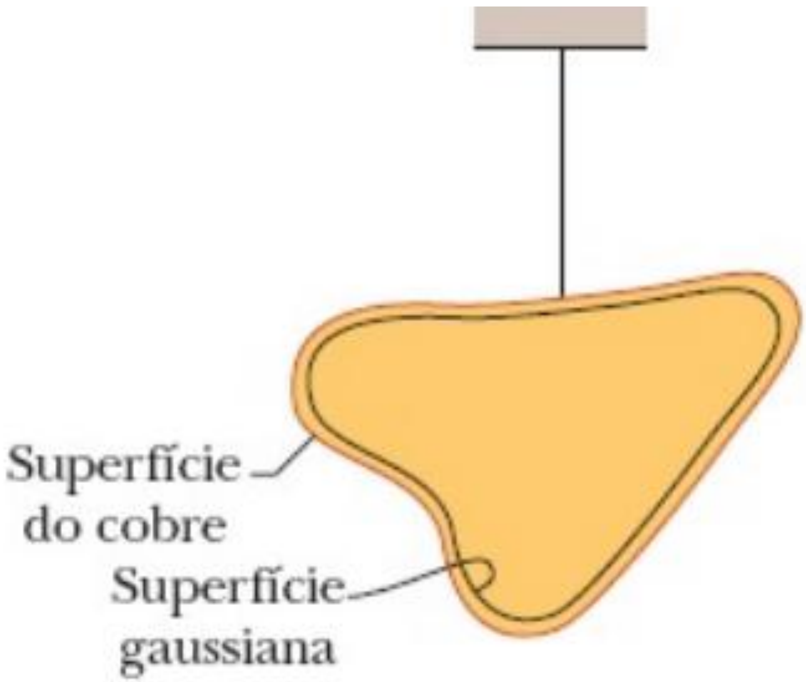
- Como consequência disso, temos a

- **Propriedade 2.** Toda carga em excesso em um condutor deposita-se em sua superfície apenas, não ficando no interior do condutor.

- Para demonstrar essa propriedade, aplicamos a Lei de Gauss.

Campo em um Condutor Carregado

- **Demonstração.**
- Na figura, vemos uma superfície gaussiana envolvendo todo o interior do condutor.



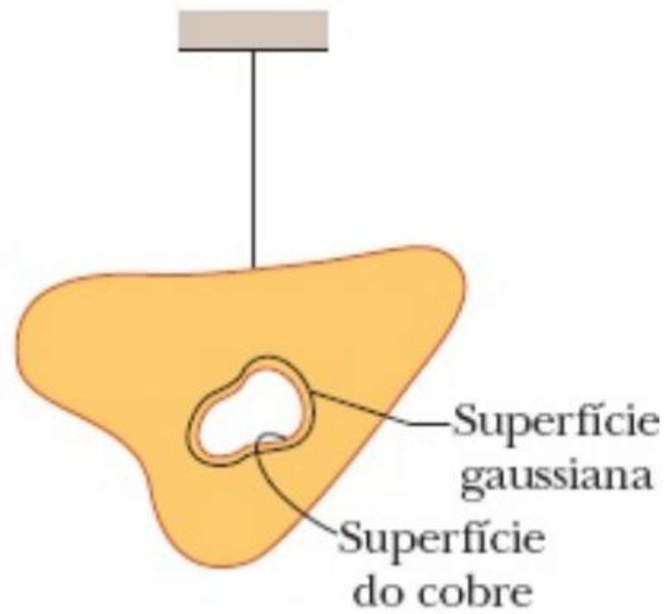
- Aplicando a lei de Gauss, vemos que a carga no interior deve ser nula:

$$0 = \oint \vec{E} \cdot \hat{n}\, dA = \frac{q_{\text{env}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow q_{\text{env}} = 0$$

- Isso porque já sabemos que o campo é nulo (logo, sua integral é zero).

Condutor com uma Cavidade

- Mas e se o condutor tiver uma cavidade?



- Neste caso, o que acontece?
- Pensando pela Lei de Gauss, nada muda!
- Se não há campo no interior do condutor, não pode haver carga na superfície da cavidade.

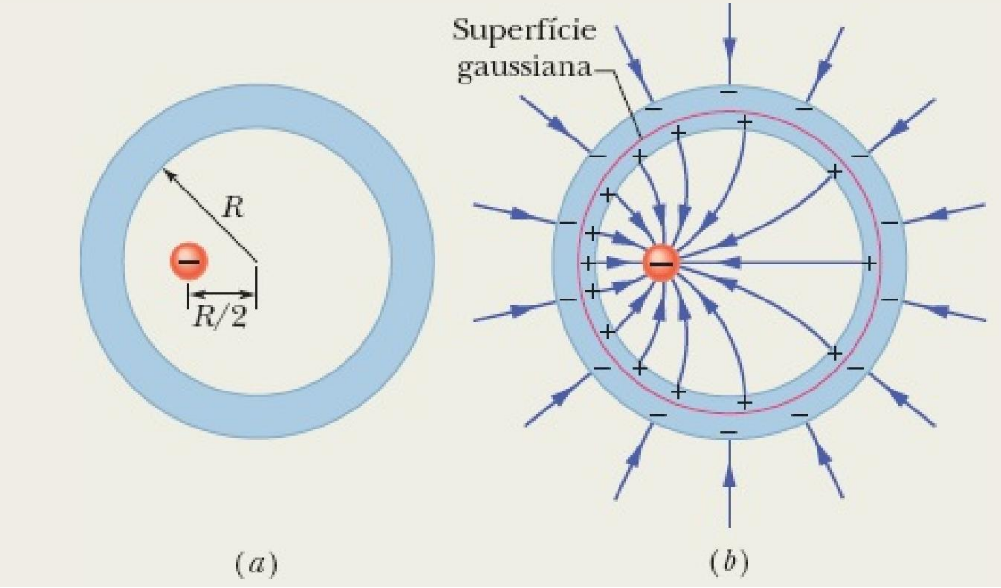
- **Propriedade 3.** Quando um condutor tem uma cavidade interna, esta não possui carga: todo o excesso de carga se distribui na superfície externa.

Caso diferente: carga no interior da cavidade

- Se, além da cavidade, houver uma carga no interior da cavidade, sem contato com ela, a situação muda um pouco e precisamos recorrer diretamente à Lei de Gauss para resolver a situação.

Exemplo 23.05 Casca metálica esférica, campo elétrico e carga

A Fig. 23-13*a* mostra uma seção reta de uma casca metálica esférica de raio interno R. Uma partícula com uma carga de $-5{,}0\ \mu C$ está situada com o centro a uma distância $R/2$ do centro da casca. Se a casca é eletricamente neutra, quais são as cargas (induzidas) na superfície interna e na superfície externa? Essas cargas estão distribuídas uniformemente? Qual é a configuração do campo elétrico do lado de dentro e do lado de fora da casca?



Exemplo

1. Um condutor possui uma carga de $Q = 250 \times 10^{-6} C$. No interior do condutor existe uma cavidade. No interior da cavidade, sem entrar em contato com ela, está uma carga pontual $q = -60 \times 10^{-6} C$. Determine a carga:
   a) q_{cav} da superfície da cavidade.
   b) q_{ext} da superfície externa do condutor.

Exercício

2. Um condutor possui uma carga de $Q = -9{,}8 \times 10^{-6} C$. No interior do condutor existe uma cavidade. No interior da cavidade, sem entrar em contato com ela, está uma carga pontual $q = +10{,}5 \times 10^{-6} C$. Determine a carga:
   a) q_{cav} da superfície da cavidade.
   b) q_{ext} da superfície externa do condutor.

Campo na superfície de um condutor

- Vimos que a carga irá se concentrar toda na superfície, mas que campo será gerado por essa carga?

- Aplicando a Lei de Gauss, concluímos que este campo deve valer:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad \text{(superfície condutora)}$$

- onde σ é a densidade superficial de carga do condutor em cada ponto.