Universidade Federal do Pará
Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Faculdade de Física

Uma Introdução à Lógica Matemática

Prof. Isaac Torres
https://itsufpa.wixsite.com/prof-isaac-torres

O que é a Lógica e onde Atua?

- Segundo a Enciclopédia Barsa Universal (2010), a Lógica é:

> *"Ciência que estuda as leis do raciocínio e as condições de verdade em vários domínios do conhecimento."*

- Podemos dizer que a Lógica é:
  - A Linguagem da Ciência
  - O Conjunto das Regras de Comunicação Científica
  - O que estrutura o método científico
  - O que nos impede de cair em falácias
  - Nosso instrumento de busca pela verdade

O Conceito de Proposição

- A lógica trabalha apenas com proposições e relações entre elas.

- As Proposições são os “átomos” da Lógica, suas expressões mais elementares.

- Uma proposição é uma **oração declarativa que pode ser classificada em verdadeira ou falsa**.

- Em outras palavras, para uma frase ser classificada como uma proposição, ela deve satisfazer três características obrigatórias:

i. Sendo uma oração, tem sujeito e predicado;

ii. É declarativa, não sendo exclamativa sem interrogativa;

iii. É ou Verdadeira ou Falsa.

Exemplos

- As proposições podem ser representadas por letras do alfabeto, como P, Q, ...

- As sentenças abaixo são proposições lógicas:

P: Nove é diferente de cinco (simbolicamente: $9 \neq 5$)
Q: Sete é maior do que três ($7>3$)
R: Dois é um número inteiro
S: Três é divisor de onze
T: Quatro vezes cinco é igual a 20

- Todas essas sentenças são, de fato, proposições, pois satisfazem as três exigências que definem uma proposição.

Contra-exemplos

- Por outro lado, as frases abaixo não são proposições lógicas, não podendo ser usadas como argumento:

P: Três vezes cinco mais um
Q: A raiz quadrada de dois é um número racional?
R: O triplo de um número menos um é igual a onze (simbolicamente: $3x - 1 = 11$)

- Justifique.

Exercício

1. Verifique quais sentenças abaixo são proposições (de acordo com a definição dada!) e quais não são. Para as proposições, classifique-as como verdadeiras ou falsas.
    a. $5 \cdot 4 = 20$
    b. $5 - 4 = 3$
    c. $2 + 7 \cdot 3 = 5 \cdot 4 + 3$
    d. $3x + 4 = 2$
    e. $2n + 365 = 900$
    f. $e^{-x} = \cos x$
    g. $5(3 + 1) = 5 \cdot 3 + 5 \cdot 1$
    h. $1 + 3 \neq 1 + 6$
    i. $(-2)^5 \geq (-2)^3$
    j. $3 + 4 > 0$
    k. $11 - 4 \cdot 2$
    l. $4^3 - \sqrt{144}$

A Negação de Uma Proposição

- A negação de uma dada proposição P é uma outra proposição, representada por

$$\boldsymbol{\sim P} \qquad \text{ou} \qquad \boldsymbol{\neg P}$$

- que tem sempre o valor lógico oposto ao de P. Se P é verdadeira, $\sim P$ é falsa; se P é falsa, $\sim P$ é verdadeira.

- Expressamos essa ideia através de uma **tabela-verdade**:

P	$\sim P$
V	**F**
F	**V**

Exercício

2. Negue as proposições abaixo:

a. $3 \cdot 7 = 21$

b. $3 \cdot (11 - 7) \neq 5$

c. $3 \cdot 2 + 1 > 4$

d. $5 \cdot 7 - 2 \leq 5 \cdot 6$

e. $\left(\frac{1}{2}\right)^7 < \left(\frac{1}{2}\right)^7$

f. $\sqrt{2} < 1$

g. $-(-4) \geq 7$

h. $3|7$

Os Conectivos Lógicos “e” e “ou”

- Trabalhar só com proposições tão simples seria uma limitação.

- Podemos conectar duas ou mais proposições usando os conectivos “e” e “ou”, obtendo uma proposição maior, uma **proposição composta** de duas outras proposições.

- Eles possuem símbolos:

Conectivo	Símbolo
e	$\wedge$
ou	$\vee$

- Vamos estuda-los separadamente.

O Conectivo "e"

- Considere duas proposições P e Q (pense nos exemplos anteriores como referência).

- A partir delas, construímos a proposição "$\boldsymbol{P}$ ***e*** $\boldsymbol{Q}$", representada por $\boldsymbol{P \wedge Q}$, que é verdadeira quando, e somente quando, ambas forem verdadeiras.

- Ou seja, basta que P seja falsa ou que Q seja falsa para que se tenha P *e* Q falsa.

- Podemos resumir isso na tabela-verdade ao lado:

- Aliás, como preenche-la?

$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{Q}$	$\boldsymbol{P \wedge Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemplos

Exemplo a)

- P: $2 > 0$ **(V)**
- Q: $2 \neq 1$ **(V)**
- $P \wedge Q$: $2 > 0$ e $2 \neq 1$ **(V)**

Exemplo b)

- P: $-2 < -1$ **(V)**
- Q: $(-2)^2 < (-1)^2$ **(F)**
- $P \wedge Q$: $-2 < -1$ e $(-2)^2 < (-1)^2$ **(F)**

Exemplos

Exemplo c)

- P: O perímetro de um quadrado de lado a vale $2a$ **(F)**
- Q: A área de um quadrado de lado a vale a^2 **(V)**
- $P \wedge Q$: Um quadrado de lado a tem perímetro $2a$ e área a^2 **(F)**

Exemplo d)

- P: O perímetro de um círculo de raio r é πr^2 **(F)**
- Q: A área de um círculo de raio r é $2\pi r$ **(F)**
- $P \wedge Q$: Um círculo de raio r tem perímetro πr^2 e área $2\pi r$ **(F)**

Exercício

3. Considere as proposições abaixo:

P: $4^2 < 4^5$

Q: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^5$

R: 2 é um número primo

S: 21 é um número primo

T: $3 \leq 3$

U: π é um número racional

Classifique em Verdadeiras ou Falsas as proposições abaixo:

a. P e Q

b. U e T

c. T e P

d. Q e S

e. R e T

f. Q e R

O Conectivo "ou"

- Considere duas proposições P e Q (pense nos exemplos anteriores como referência).

- A partir delas, construímos a proposição "$\boldsymbol{P}$ ***ou*** $\boldsymbol{Q}$", representada por $\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}$, que é verdadeira quando pelo menos uma das proposições é verdadeira.

- Ou seja, para que se tenha P *ou* Q falsa, ambas devem ser falsas, caso contrário, P *ou* Q será verdadeira.

- Podemos resumir isso na tabela-verdade ao lado:

- Aliás, como preenche-la?

$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{Q}$	$\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemplos

Exemplo a)

- P: $2 > 0$ (V)
- Q: $2 \neq 1$ (V)
- $P \vee Q$: $2 > 0$ ou $2 \neq 1$ (V)

Exemplo b)

- P: $-2 < -1$ (V)
- Q: $(-2)^2 < (-1)^2$ (F)
- $P \vee Q$: $-2 < -1$ ou $(-2)^2 < (-1)^2$ (V)

Exemplos

Exemplo c)

- P: O perímetro de um quadrado de lado a vale $2a$ **(F)**
- Q: A área de um quadrado de lado a vale a^2 **(V)**
- $P \vee Q$: Um quadrado de lado a tem perímetro $2a$ ou área a^2 **(V)**

Exemplo d)

- P: O perímetro de um círculo de raio r é πr^2 **(F)**
- Q: A área de um círculo de raio r é $2\pi r$ **(F)**
- $P \vee Q$: Um círculo de raio r tem perímetro πr^2 ou área $2\pi r$ **(F)**

Exercício

4. Considere as proposições abaixo:

P: $4^2 < 4^5$

Q: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^5$

R: 2 é um número primo

S: 21 é um número primo

T: $3 \leq 3$

U: π é um número racional

Classifique em Verdadeiras ou Falsas as proposições abaixo:

- **a.** P ou Q
- **b.** U ou T
- **c.** T ou P
- **d.** Q ou S
- **e.** R ou T
- **f.** Q ou R

O lógico tem um filho

- Um lógico está no hospital, sua esposa está em trabalho de parto.
- O bebê acaba de nascer.
- Ele encontra um conhecido no corredor que pergunta: é menino ou menina.
- O lógico responde: sim.

Prompt que gerou a imagem em https://gencraft.com/generate:

create an image of a father holding his newborn baby at the side of the mother of the baby, and both are happy, and the father is a mathematician

A Implicação Lógica

- Vimos como "juntar" duas proposições: usamos conectivos, **e** e **ou**.

- Para podermos estruturar o conhecimento, precisamos mostrar que uma proposição é **consequência** de outras, ou seja, que a partir de algumas conseguimos chegar em muitas outras.

- O ponto fundamental nesse argumento é conseguir sair de uma proposição P para uma outra proposição Q, mostrando que Q é uma consequência lógica de P.

- Quando isso ocorre, dizemos que $\boldsymbol{P}$ **implica** $\boldsymbol{Q}$, representado por

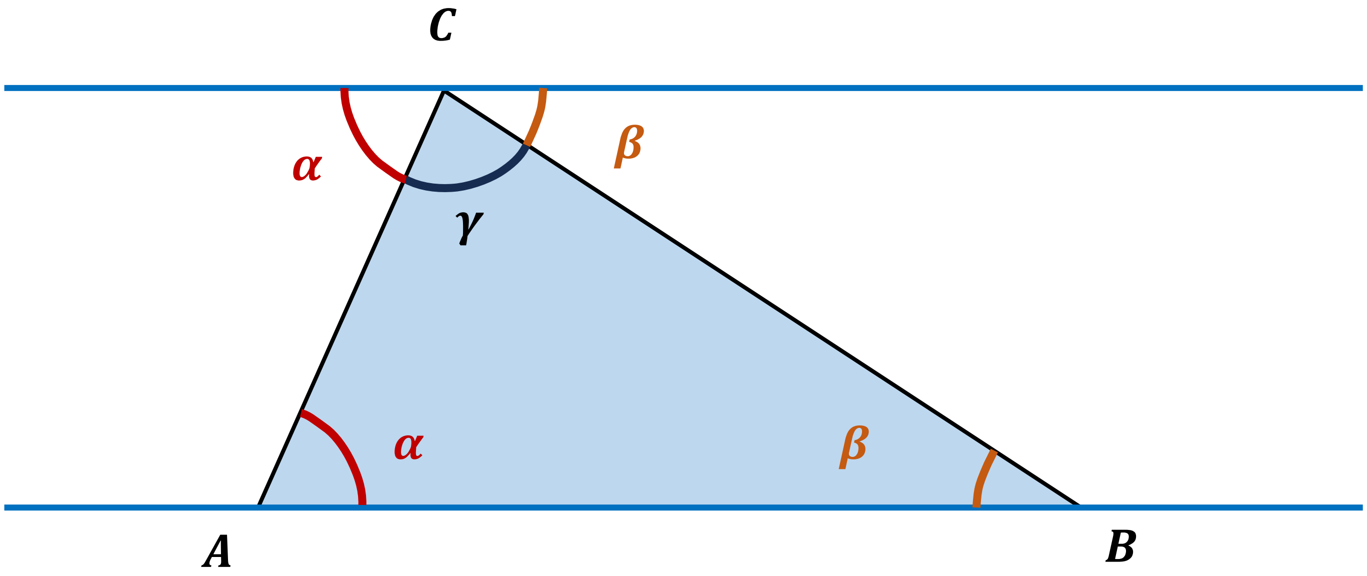
$$\boldsymbol{P \Rightarrow Q}$$

- Também dizemos "se P, então Q"

Exemplo a)

- P: A figura ao lado é um triângulo
- Q: A soma dos seus ângulos internos é 180°
- $P \Rightarrow Q$: Em todo triângulo, a soma dos ângulos internos é 180°

Logo, $\alpha + \beta + \gamma = 180°$,
mostrando que $P \Rightarrow Q$.



Exemplos

Exemplo b)

- P: X é um quadrado
- Q: X é um retângulo
- $P \Rightarrow Q$: Todo quadrado é um retângulo

Exemplo c) – Contra-exemplo

- Q: X é um retângulo
- P: X é um quadrado
- $Q \nRightarrow P$: **Q não implica P**, pois nem todo retângulo é um quadrado

Somente se

- Quando $P \Rightarrow Q$, note que P é verdadeira **somente se** Q for verdadeira.

- No exemplo b, uma figura é um quadrado somente se for um retângulo.

- Ser retângulo é uma **condição necessária** para ser um quadrado.

Exercício

- Pesquise sobre como demonstrar o Teorema de Pitágoras.

- Existem mais de 370 demonstrações diferentes. Escolha uma!

- Todas elas são da forma

$$P \Rightarrow Q$$

- Recentemente, foi descoberta uma nova demonstração →


Menu Buscar GALILEU | Ciência Entrar

Estudantes podem ter chegado a prova "impossível" para Teorema de Pitágoras

Artigo de alunas do ensino médio de Nova Orleans, nos EUA, desafia ideia de que o teorema de 2 mil anos não pode ser demonstrado a partir da trigonometria; entenda

Por Redação Galileu
02/04/2023 13h57 · Atualizado

A Recíproca de uma Implicação

- Considere que $P \Rightarrow Q$.

- A Proposição $Q \Rightarrow P$ é chamada **recíproca** da implicação $P \Rightarrow Q$.

- O exemplo c) anterior mostra que nem sempre a recíproca é verdadeira.

- Podemos pensar em infinitos exemplos:

a) Todo número inteiro é real, mas nem todo número real é inteiro.

b) Todo número real é complexo, mas nem todo número complexo é real.

A Equivalência Lógica

- Quando vale uma implicação $P \Rightarrow Q$ e a sua recíproca $Q \Rightarrow P$, dizemos que as proposições P e Q são equivalentes, o que é representado por:

$$\boldsymbol{P \Leftrightarrow Q}$$

- Também dizemos "P se, e somente se, Q".

- Também podemos dizer que **P é uma condição necessária e suficiente para Q.**

- Para vermos mais exemplos de implicações e equivalências lógicas, precisamos antes estudar os quantificadores lógicos.

Funções Proposicionais ou Sentenças Abertas

- Vimos que expressões do tipo

  a) $x + 1 = 7$
  b) $y > 2$
  c) $x^2 + \log x = \text{sen}\,(x^3 + 1)$

- não podem ser classificadas como Verdadeiras ou Falsas.

- No entanto, elas possuem muito valor, pois se tornam proposições se fizermos uma das duas coisas a seguir:

  a) Atribuir valores às variáveis
  b) Utilizar quantificadores

- Elas são, por esse motivo, chamadas de **funções proposicionais** ou **sentenças abertas**.

O Quantificador $\forall$ - “para todo”

- Quando afirmamos que a sentença aberta é verdadeira para quaisquer valor da variável (dentro de um certo universo), estamos aplicando o quantificador **para todo**, representado pelo símbolo abaixo:

$$\forall$$

- Vejamos a seguir como transformar sentenças abertas em proposições usando o para todo.

- No dia-a-dia, em vez de “para todo x”, usamos também “para cada x” ou “dado x”.

Exemplos

- Aplicando o quantificador ∀ para as sentenças abaixo, identificando suas variáveis, elas tornam-se proposições, que podem ser classificadas como verdadeiras ou falsas.

Exemplo a)

- Em símbolos: $\forall x, x + 1 = 7$
- Lê-se: para todo x, temos $x + 1 = 7$
- ou: para cada x, temos $x + 1 = 7$

- Note que a proposição é **falsa**. Para verificar isso, basta escolher qualquer número diferente de -6.

Exemplos

Exemplo b)

- Em símbolos: $\forall y, y^3 = 2y^2$
- Lê-se: para todo y, vale $y^3 = 2y^2$

- Note que a proposição é **falsa**. Para verificar isso, basta escolher qualquer número diferente de 0 e 2.

Exemplo c)

- Em símbolos: $\forall y, (a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$
- Lê-se: para todo a, vale a expressão $(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$
- Note que a proposição é **verdadeira**, decorrendo de um produto notável.

O Quantificador ∃ - "existe"

- Quando queremos evidenciar o fato de que existe um certo valor da variável para o qual a sentença aberta é verdadeira, sem entrar no mérito de quantas existem ou quais são exatamente esses valores, usamos o quantificador **existe**, representador por:

$$\exists$$

- São sinônimos de "existe" expressões como "existe um" ou "existe pelo menos um".
- Isso não significa que, nem exclui a possibilidade de que, exista apenas um valor para o qual a sentença é válida.
- Quando existir apenas um valor, podemos usar $\exists!$ ou $\exists|$

Exemplos

Exemplo a)

- Em símbolos: $\exists x, x + 1 = 7$
- Lê-se: existe x tal que $x + 1 = 7$

- Note que a proposição é **verdadeira**, pois de fato existe $x = 6$ satisfazendo a sentença.

Exemplo b)

- Em símbolos: $\exists y, y^2 + 1 < 0$
- Lê-se: existe um y tal que $y^2 + 1 < 0$
- Note que a proposição é **falsa**, pois $y^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 + 1 \geq 1 > 0$.

Negando Proposições

- Utilizando tabelas-verdade, é possível mostrar que:

- A negação de $\forall x, p(x)$ é a sentença $\exists x, \sim p(x)$.
- A negação de $\exists x, p(x)$ é a sentença $\forall x, \sim p(x)$.

- **Exemplo a)** A negação de

P: existe x tal que $x + 1 = 7$

- é a proposição

$\sim P$: para todo x, temos $x + 1 \neq 7$

- **Exemplo b)** A negação de

P: para todo y, $y^2 + 1 < 0$

- é a proposição

$\sim P$: existe y tal que $y^2 + 1 \geq 0$

Exercícios

- Construa a negação das proposições a seguir e classifique as sentenças em verdadeiras ou falsas:

a) Para todo x, $x + 3 = 5$

b) Existe y tal que $y^2 = -1$

c) $\forall z\,,\ (z-2)^2 = z^2 - 5z + 4$

d) $\exists w\,,\ w^3 = -27$

e) $\forall x\,,\ \exists y$ tal que $y = x^2$

f) $\forall x\,,\ \exists y$ tal que $\mathrm{y} = \sqrt{x}$

g) $\exists a,\ \sqrt{a^2+1} = a + 1$

h) $\exists a,\ -(-a)^2 = a^2$

Por que os Livros de Matemática são assim?

Definition. Let A and B be two subsets of E. We say that the hyperplane $H = [f = \alpha]$ *separates A and B* if

$$\boxed{f(x) \leq \alpha \quad \forall x \in A \quad \text{and} \quad f(x) \geq \alpha \quad \forall x \in B.}$$

We say that H *strictly separates* A and B if there exists some $\varepsilon > 0$ such that

$$\boxed{f(x) \leq \alpha - \varepsilon \quad \forall x \in A \text{ and } f(x) \geq \alpha + \varepsilon \quad \forall x \in B.}$$

Geometrically, the separation means that A lies in one of the half-spaces determined by H, and B lies in the other; see Figure 1.

Finally, we recall that a subset $A \subset E$ is *convex* if

$$\boxed{tx + (1-t)y \in A \quad \forall x, y \in A, \quad \forall t \in [0, 1].}$$

• **Theorem 1.6 (Hahn–Banach, first geometric form).** *Let $A \subset E$ and $B \subset E$ be two nonempty convex subsets such that $A \cap B = \emptyset$. Assume that one of them is open. Then there exists a closed hyperplane that separates A and B.*

The proof of Theorem 1.6 relies on the following two lemmas.

Lemma 1.2. *Let $C \subset E$ be an open convex set with $0 \in C$. For every $x \in E$ set*

O livro tenta organizar o conteúdo estabelecendo com clareza a relação entre as suas afirmações, a hierarquia entre elas, qual a mais importante, qual é uma nomenclatura e qual traz algo realmente novo.

A Comunicação Matemática I: Teoremas

- Os **Teoremas** são proposições da forma

$$P \Rightarrow Q$$

P é chamada a **hipótese** do Teorema. É o que supomos ser verdade.

Q é a **tese** do Teorema, é o que queremos mostrar que é verdade a partir de P.

- ou seja, são implicações lógicas, que expressam uma propriedade ou um resultado importante sobre determinados objetos matemáticos.

- Geralmente, eles são expressos da seguinte forma:

Teorema 1 (Pitágoras)**.** Num triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c, tem-se $a^2 = b^2 + c^2$.

- São numerados e o nome do autor é expresso entre parênteses.

Alguns Teoremas Importantes do 1º Semestre

Teorema 6.6. (Teorema do Núcleo e da Imagem.) *Sejam* E, F *espaços vetoriais de dimensão finita. Para toda transformação linear* $\mathsf{A}\colon \mathsf{E} \to \mathsf{F}$ *tem-se* $\dim \mathsf{E} = \dim \mathcal{N}(\mathsf{A}) + \dim \mathcal{I}\mathrm{m}(\mathsf{A})$.

5.6.1 TEOREMA (***Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 1***) *Se f for contínua em $[a, b]$ e F for uma antiderivada de f em $[a, b]$, então*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{2}$$

A Comunicação Matemática II: Demonstrações

- Embora um Teorema seja da forma $P \Rightarrow Q$ ...

- ... não é nenhum pouco óbvio que P de fato implique Q.

- Para merecer o nome de Teorema, deve ter sido **muito difícil** e levado **muito tempo** para mostrar que $P \Rightarrow Q$.

- Como isso é feito?

A Comunicação Matemática II: Demonstrações

- Deve-se quebrar essa implicação em implicações menores, mostrando que P implica P_1, depois que P_1 implica P_2, e assim por diante, num número finito de passos, para finalmente mostrar que uma certa P_n implica na conclusão desejada Q:

$$P \Rightarrow P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow P_n \Rightarrow Q$$

- E é justamente descobrir que passos intermediários são esses e como desenvolvê-los que é o desafio da demonstração do Teorema.

- Como exemplo de demonstração, vejamos a demonstração da desigualdade triangular, na aula sobre números reais.

A Comunicação Matemática III: Lemas

- Alguns Teoremas exigem um número tão grande de passos para serem demonstrados que são quebrados em teoremas menores, usados como auxiliares na demonstração do Teorema principal.

- Esses passos intermediários que antecedem um Teorema importante são chamados de Lemas.

- Ou seja: são Teoremas comuns, mas não tão centrais para a teoria em questão, são passos intermediários para algo central.

- A título de ilustração, vamos ver um exemplo sem comentar o seu conteúdo.

• **Theorem 1.6 (Hahn–Banach, first geometric form).** *Let $A \subset E$ and $B \subset E$ be two nonempty convex subsets such that $A \cap B = \emptyset$. Assume that one of them is open. Then there exists a closed hyperplane that separates A and B.*

Teorema Principal

The proof of Theorem 1.6 relies on the following two lemmas.

Lemma 1.2. *Let $C \subset E$ be an open convex set with $0 \in C$. For every $x \in E$ set*

Primeiro Lema

$$p(x) = \inf\{\alpha > 0;\ \alpha^{-1}x \in C\} \tag{8}$$

(p is called the gauge of C or the Minkowski functional of C).

Then p satisfies (1), (2), *and the following properties:*

$$\text{there is a constant } M \text{ such that } 0 \le p(x) \le M\|x\| \quad \forall x \in E, \tag{9}$$

$$C = \{x \in E\,;\ p(x) < 1\}. \tag{10}$$

Proof of Lemma 1.2. It is obvious that (1) holds.

Demonstração do Primeiro Lema

Proof of (9). Let $r > 0$ be such that $B(0, r) \subset C$; we clearly have

$$p(x) \le \frac{1}{r}\|x\| \quad \forall x \in E.$$

Proof of (10). First, suppose that $x \in C$; since C is open, it follows that $(1+\varepsilon)x \in C$ for $\varepsilon > 0$ small enough and therefore $p(x) \le \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$. Conversely, if $p(x) < 1$ there exists $\alpha \in (0, 1)$ such that $\alpha^{-1}x \in C$, and thus $x = \alpha(\alpha^{-1}x) + (1-\alpha)0 \in C$.

Proof of (2). Let $x, y \in E$ and let $\varepsilon > 0$. Using (1) and (10) we obtain that $\frac{x}{p(x)+\varepsilon} \in C$ and $\frac{y}{p(y)+\varepsilon} \in C$. Thus $\frac{tx}{p(x)+\varepsilon} + \frac{(1-t)y}{p(y)+\varepsilon} \in C$ for all $t \in [0, 1]$. Choosing the value $t = \frac{p(x)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}$, we find that $\frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \in C$. Using (1) and (10) once more, we are led to $p(x+y) < p(x) + p(y) + 2\varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$.

Lemma 1.3. *Let $C \subset E$ be a nonempty open convex set and let $x_0 \in E$ with $x_0 \notin C$. Then there exists $f \in E^\star$ such that $f(x) < f(x_0)$ $\forall x \in C$. In particular, the hyperplane $[f = f(x_0)]$ separates $\{x_0\}$ and C.*

Segundo Lema

Proof of Lemma 1.3. After a translation we may always assume that $0 \in C$. We may thus introduce the gauge p of C (see Lemma 1.2). Consider the linear subspace $G = \mathbb{R}x_0$ and the linear functional $g : G \to \mathbb{R}$ defined by

Demonstração do Segundo Lema

.

$$g(tx_0) = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

It is clear that

$$g(x) \leq p(x) \quad \forall x \in G$$

(consider the two cases $t > 0$ and $t \leq 0$). It follows from Theorem 1.1 that there exists a linear functional f on E that extends g and satisfies

$$f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in E.$$

In particular, we have $f(x_0) = 1$ and that f is continuous by (9). We deduce from (10) that $f(x) < 1$ for every $x \in C$.

Fim da Demonstração do Segundo Lema

Proof of Theorem 1.6. Set $C = A - B$, so that C is convex (check!), C is open (since $C = \bigcup_{y \in B}(A - y)$), and $0 \notin C$ (because $A \cap B = \emptyset$). By Lemma 1.3 there is some $f \in E^\star$ such that

$$f(z) < 0 \quad \forall z \in C,$$

that is,

$$f(x) < f(y) \quad \forall x \in A, \quad \forall y \in B.$$

Finalmente a Demonstração do Teorema Princial

Fix a constant α satisfying

$$\sup_{x \in A} f(x) \leq \alpha \leq \inf_{y \in B} f(y).$$

Clearly, the hyperplane $[f = \alpha]$ separates A and B.

A Comunicação Matemática IV: Proposições

- Proposição também é um Teorema.
- Muitos autores utilizam essa nomenclatura para reservar o nome Teorema para os resultados principais.
- As Proposições seriam então **Teoremas "comuns"**

Proposition 1.9. *Let $M \subset E$ be a linear subspace. Then*

$$\boxed{(M^{\perp})^{\perp} = \overline{M}}.$$

Let $N \subset E^{\star}$ be a linear subspace. Then

$$(N^{\perp})^{\perp} \supset \overline{N}.$$

Proof. It is clear that $M \subset (M^{\perp})^{\perp}$, and since $(M^{\perp})^{\perp}$ is closed we have $\overline{M} \subset (M^{\perp})^{\perp}$. Conversely, let us show that $(M^{\perp})^{\perp} \subset \overline{M}$. Suppose by contradiction that there is some $x_0 \in (M^{\perp})^{\perp}$ such that $x_0 \notin \overline{M}$. By Theorem 1.7 there is a closed hyperplane that strictly separates $\{x_0\}$ and $\overline{M}$. Thus, there are some $f \in E^{\star}$ and some $\alpha \in \mathbb{R}$ such that

$$\langle f, x \rangle < \alpha < \langle f, x_0 \rangle \quad \forall x \in M.$$

Since M is a linear space it follows that $\langle f, x \rangle = 0 \quad \forall x \in M$ and also $\langle f, x_0 \rangle > 0$. Therefore $f \in M^{\perp}$ and consequently $\langle f, x_0 \rangle = 0$, a contradiction.

It is also clear that $N \subset (N^{\perp})^{\perp}$ and thus $\overline{N} \subset (N^{\perp})^{\perp}$.

Exemplo do Mesmo Livro anterior

A Comunicação Matemática V: Axiomas

- Axiomas são proposições que não são demonstradas.
- Elas são os fundamentos de uma teoria, são a sua base.
- A partir dos Axiomas, se demonstra todo o resto.
- Veja alguns axiomas necessários para estudarmos conjuntos.
- Alguns sinônimos de Axioma:
    - Princípio
    - Postulado

A Comunicação Matemática V: Axiomas

- Grosso modo, é preciso garantir que, em primeiro lugar os conjuntos existem, é possível fazer as operações usuais com eles e tudo isso é garantido por um conjuntos de proposições que versam sobre os próprios conjuntos, proposições essas que supomos verdadeiras.

- Veja alguns deles, não se preocupe com seu significado por enquanto:

III Axiom (of Null Set) $\varnothing$ is a set.

IV Axiom (of Pairing) If A, B are distinct sets, then $\mathscr{A} = \{x \mid (x = A) \vee (x = B)\}$ is a *set* (which contains exactly two elements). It is denoted by $\{A, B\}$.

V Axiom (of Union) If $\{A_\alpha \mid \alpha \in \mathscr{A}\}$ is a family of sets (recall that, as defined in **4**, this means that $\mathscr{A}$ and each A_α are *sets*), then $\bigcup \{A_\alpha \mid \alpha \in \mathscr{A}\} = \{x \mid \exists\, \alpha \in \mathscr{A} : x \in A_\alpha\}$ is a set.

VI Axiom (of Replacement) If A is a set and if $f\colon A \to \mathscr{A}$ is a map, then $f(A)$ is a set.

Os Axiomas da Lógica Proposicional

- A própria Lógica está baseada em dois princípios, ou seja, dois Axiomas:

- **Axioma 1** (Princípio da não contradição). Uma dada proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

- **Axioma 2** (Princípio do Terceiro Excluído). Uma dada proposição ou é verdadeira ou é falsa, não existindo uma terceira possibilidade.

- Tudo que estudamos hoje (e tudo que estudamos em ciência) está baseado implícita ou explicitamente no uso destes dois axiomas.

Referências

- G. Iezzi, C. Murakami. *Fundamentos de Matemática Elementar, 1: conjuntos, funções*. 8.ed. Atual Editora, São Paulo, 2011.

- R.A.S. Fajardo. *Lógica Matemática*. Edusp, São Paulo, 2017.

- G.S.S. Ávila. *Análise Matemática para Licenciatura.* Editora Edgard Blücher, Sçao Paulo, 2001.