Universidade Federal do Pará
Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Faculdade de Física

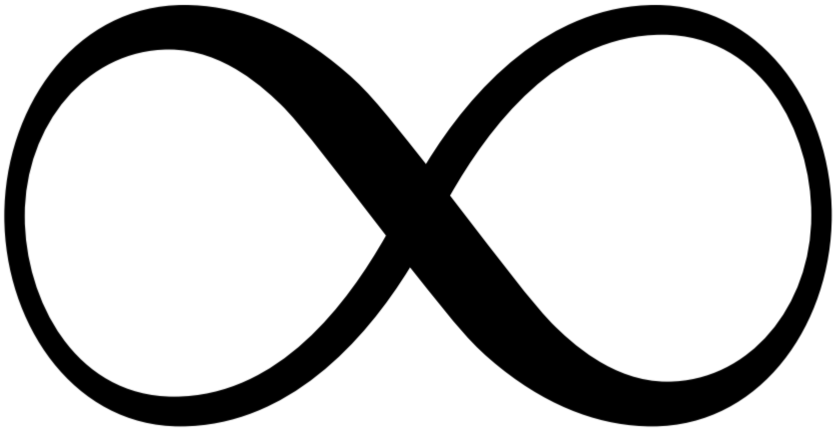
Introdução ao Cálculo

Prof. Isaac Torres
https://itsufpa.wixsite.com/prof-isaac-torres

Alguns Problemas Intrigantes

- Alguns problemas não podem ser resolvidos usando apenas álgebra e geometria.

- Eles envolvem de alguma forma o infinito, sempre.



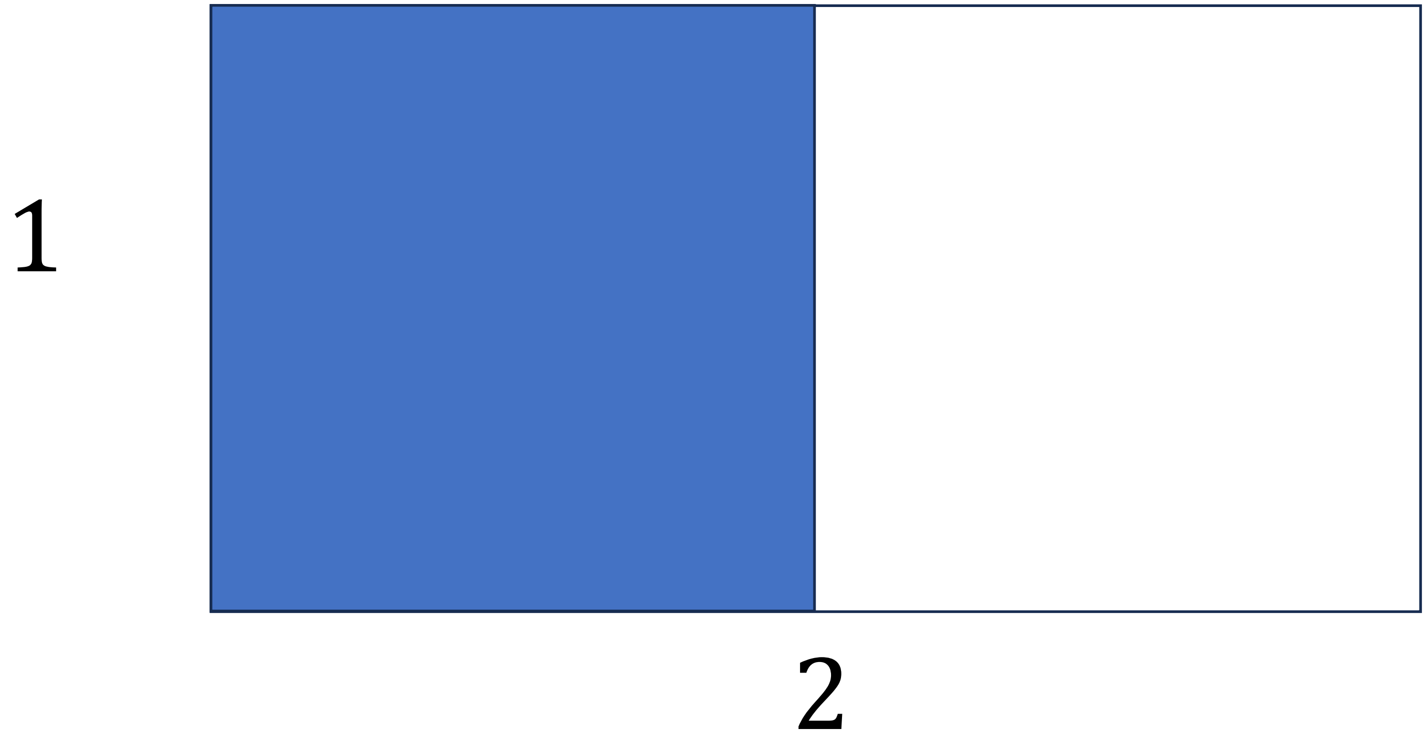
Problema 1

- Aprendemos que a área do retângulo abaixo é 2:

Problema 1

- Mas podemos "varrer" essa área aos poucos ... primeiro metade, que vale 1:

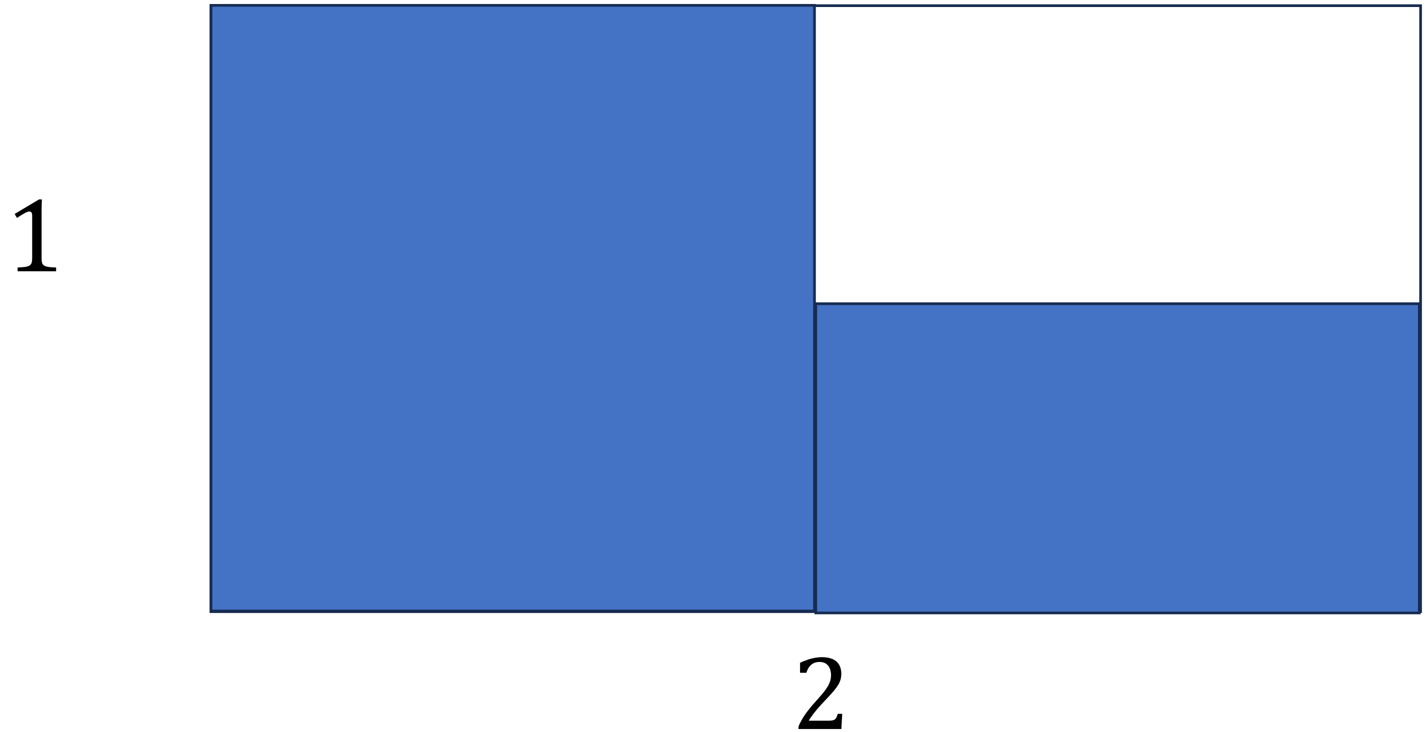
$$\text{Área Azul} = 1 +$$



Problema 1

- Depois, podemos pintar metade do que sobrou, e a área azul passa a ser:

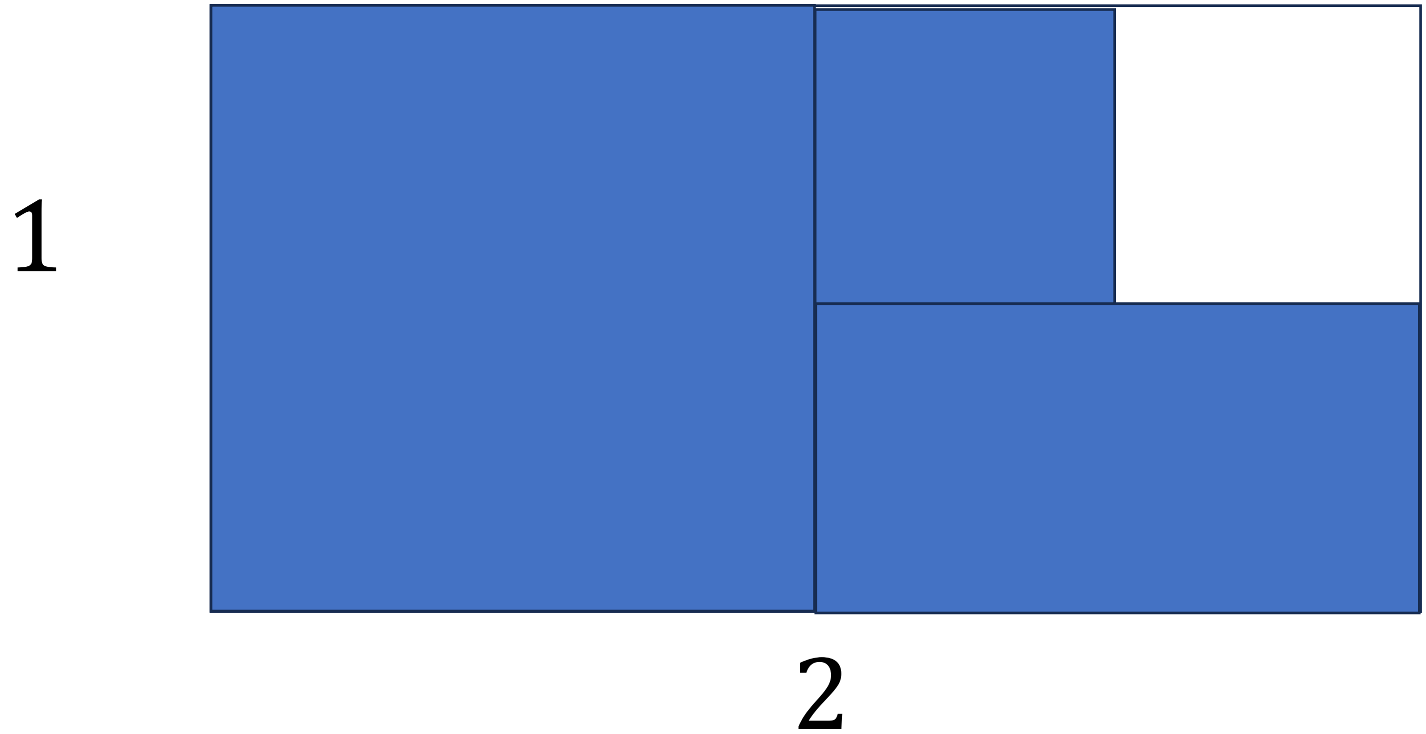
$$\text{Área Azul} = 1 + \frac{1}{2} +$$



Problema 1

- E, depois, metade do que sobrou, e a área azul passa a ser agora dada por:

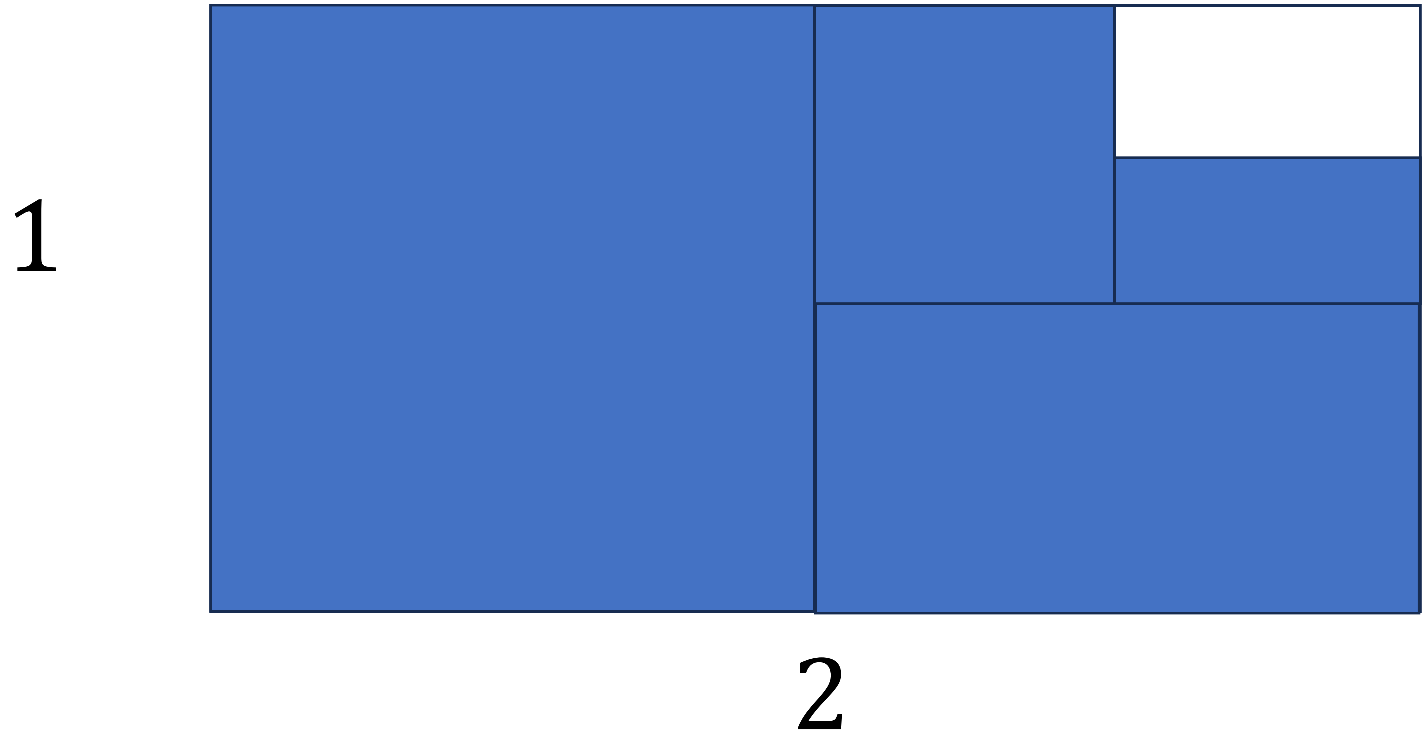
$$\text{Área Azul} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$



Problema 1

- E, depois, metade do que sobrou, e a área azul passa a ser agora dada por:

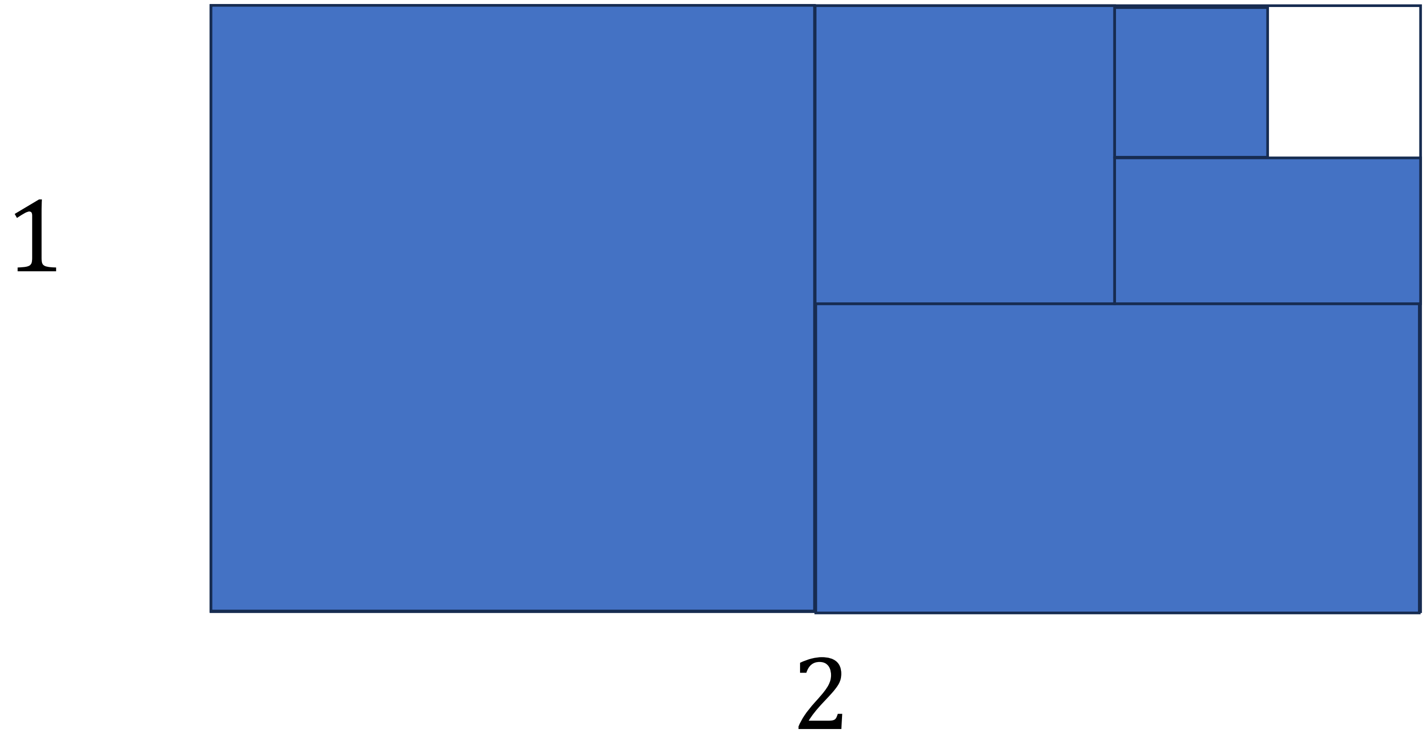
$$\text{Área Azul} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$



Problema 1

- E, depois, metade do que sobrou, e a área azul passa a ser agora dada por:

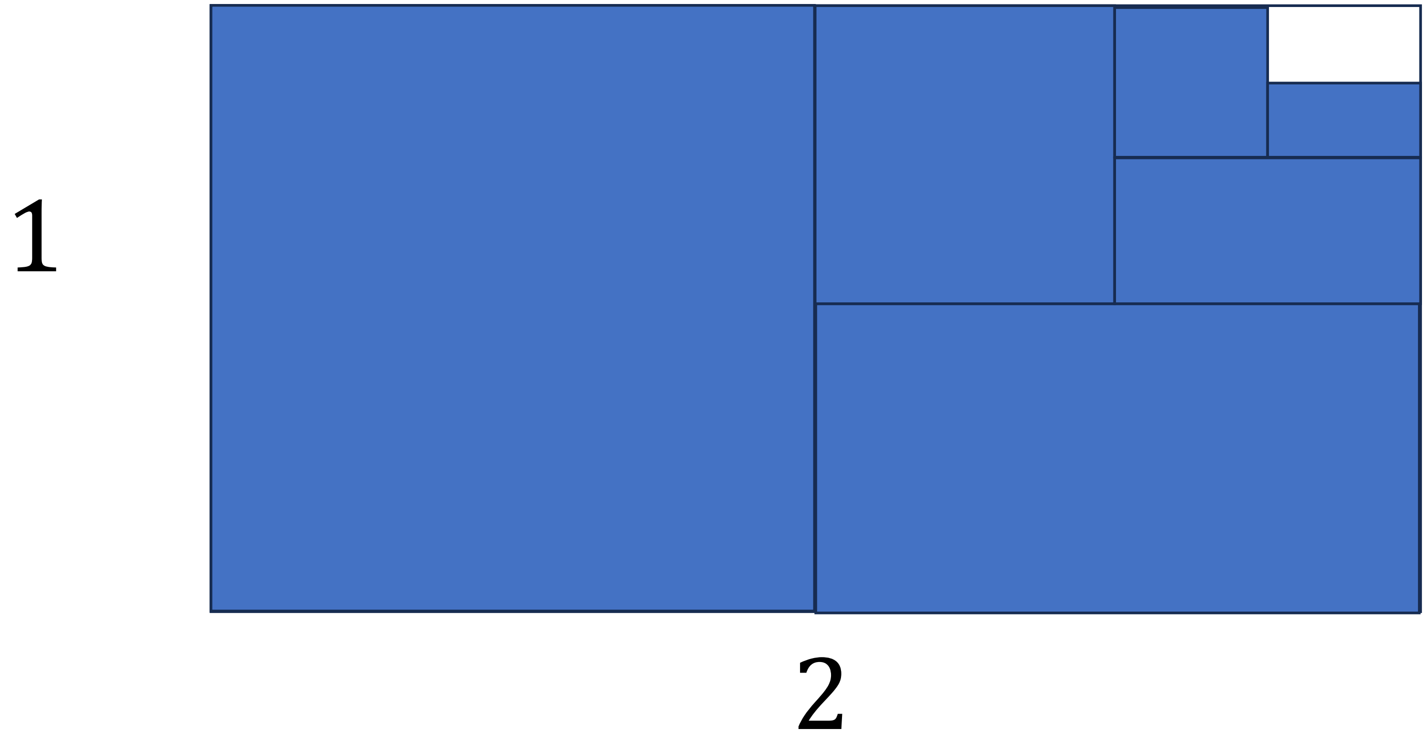
$$\text{Área Azul} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$$



Problema 1

- E, depois, metade do que sobrou, e a área azul passa a ser agora dada por:

$$\text{Área Azul} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$$



Problema 1

- Como a área do retângulo é igual a 2, nossa intuição diz que, se continuarmos indefinidamente, vamos chegar no valor 2.

- Ou seja, a soma de infinitos termos abaixo é igual a 2:

$$\text{Área Azul} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots$$

- Sendo que $\cdots$ representa todos os infinitos termos que não podemos escrever explicitamente.

Surgem algumas perguntas ...

- Se a área é finita, como fomos capazes de dividir ela em infinitas partes?

Surgem algumas perguntas ...

- Se a área é finita, como fomos capazes de dividir ela em infinitas partes?

- Como podemos garantir que essa soma é igual a 2, se ela soma infinitos termos e a álgebra só é capaz de somar um número finito de termos?

Surgem algumas perguntas ...

- Se a área é finita, como fomos capazes de dividir ela em infinitas partes?

- Como podemos garantir que essa soma é igual a 2, se ela soma infinitos termos e a álgebra só é capaz de somar um número finito de termos?

- É possível provar matematicamente que essa soma é realmente igual a 2?

Surgem algumas perguntas ...

- Se a área é finita, como fomos capazes de dividir ela em infinitas partes?

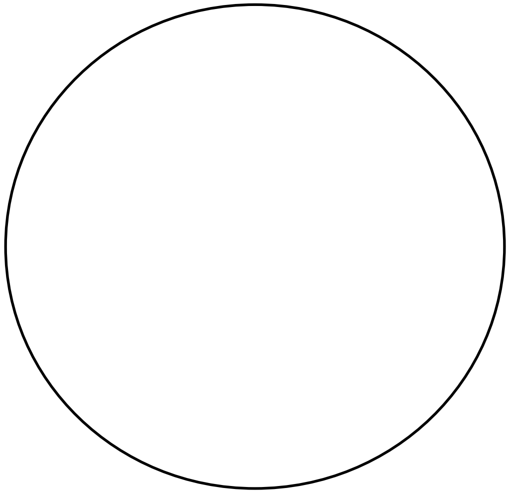
- Como podemos garantir que essa soma é igual a 2, se ela soma infinitos termos e a álgebra só é capaz de somar um número finito de termos?

- É possível provar matematicamente que essa soma é realmente igual a 2?

- O mais intrigante: como pode uma soma de infinitos termos resultar um número finito, que é 2?

Problema 2

- Determinar a área de um círculo de raio igual a r



Círculo

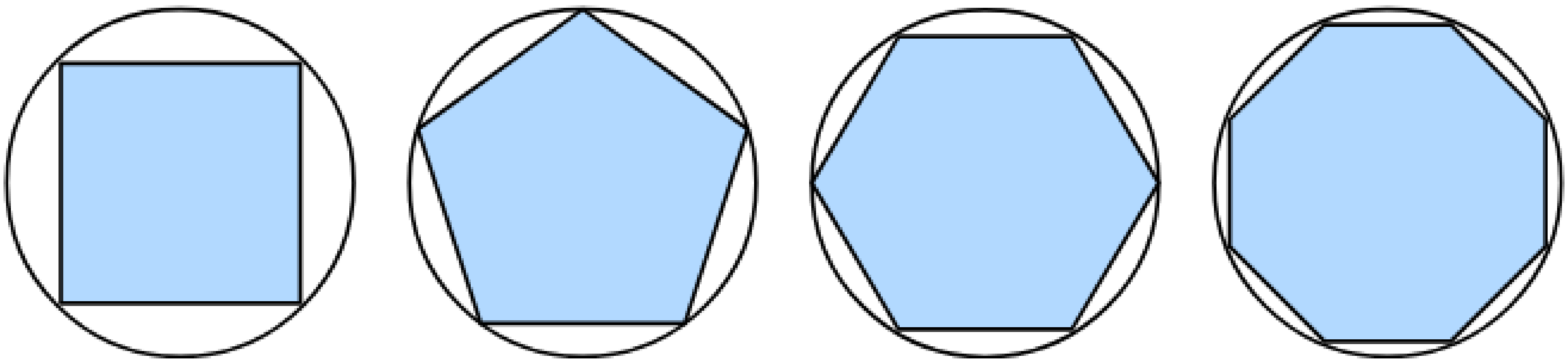
- A Geometria euclideana define áreas de quadrados de lado 1, que dão as unidades de área.

- A partir daí, definimos áreas de retângulos, triângulos e trapézios.

- *Nada na geometria permite calcular a área do círculo usando apenas geometria.*

Aproximando a área do círculo

- Podemos aproximar a área do círculo usando polígonos regulares inscritos na circuferência:



4 lados
quadrado

5 lados
pentágono

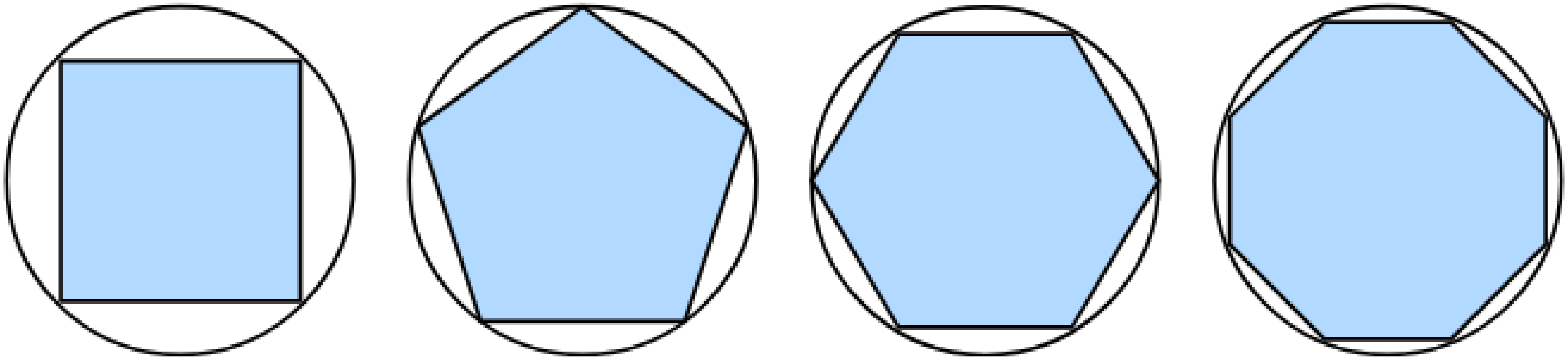
6 lados
hexágono

8 lados
octógono

Quanto mais lados, mais próxima a área fica da área do círculo ...

Aproximando a área do círculo

- Podemos aproximar a área do círculo usando polígonos regulares inscritos na circuferência:



Quando ela vai ser igual?

Aproximando a área do círculo

- Somente no infinito!
- Mas isso não é mais um polígono ...
- Como demonstrar matematicamente que esse valor é πr^2?
- Animação no geogebra:
- Inscribed Polygon to Approximate Area of Circle – GeoGebra
- Podemos calcular para valores cada vez maiores de n.

Problema 3

- Como analisar a **variação das funções**.

- Ou seja, em um função, digamos

$$y = x^2$$

- como analisar matematicamente como y varia em relação a x?

- Quando a função varia mais, quando varia menos, quando é mínima, quando é máxima?

Problema 3

- Solução dada por Newton: vamos fornecer um acréscimo a x e um a y, para ver como um acréscimo se relaciona com outro.

- Mas esse processo deixa algo estranho em aberto ...

O que significam todos esses problemas?

- Podemos traduzir matematicamente esses problemas como:

- **Problema 1:** determinar a soma de uma série infinita.

- **Problema 2:** determinar a área sob o gráfico de uma função "qualquer."

- **Problema 3:** determinar a taxa instantânea de variação de uma grandeza em relação a outra.

Temos uma saída!

- Problemas como esses levaram ao desenvolvimento de técnicas gerais que se aplicam a um grande número de problemas.

- As soluções dos problemas são dadas por:

- Problema 1: **Limite**.

- Problema 2: **Integral**.

- Problema 3: **Derivada**.

- Esses são os três tópicos fundamentais, de onde vem o nome cálculo diferencial (de derivada) e integral.

Conteúdo da Disciplina Cálculo I

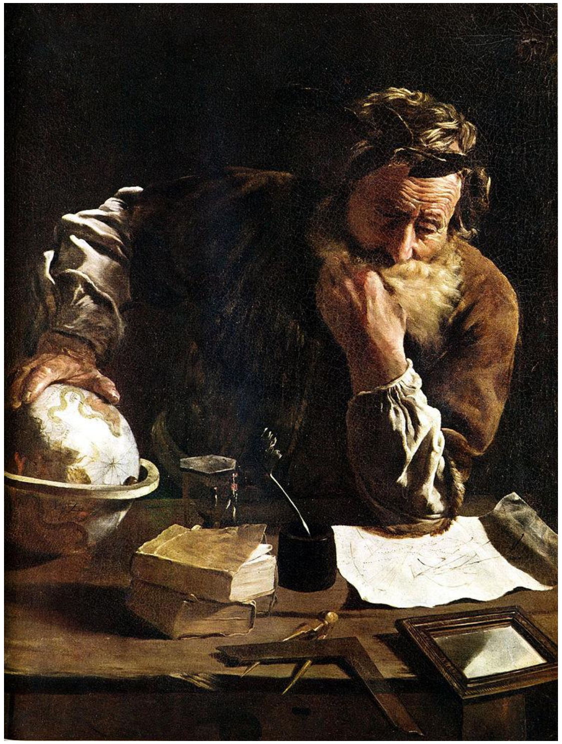
1. Pré-Cálculo, especialmente números reais e funções.
2. Limites
3. Derivada
4. Estudo da variação das funções (aplicação da derivada)
5. Integral
6. Aplicações da Integral

Um pouco sobre estes conceitos e sua história

A História se deu ao Contrário da Ementa!

- Na antiguidade, Eudoxo e Arquimedes desenvolveram a Integral

Eudoxo



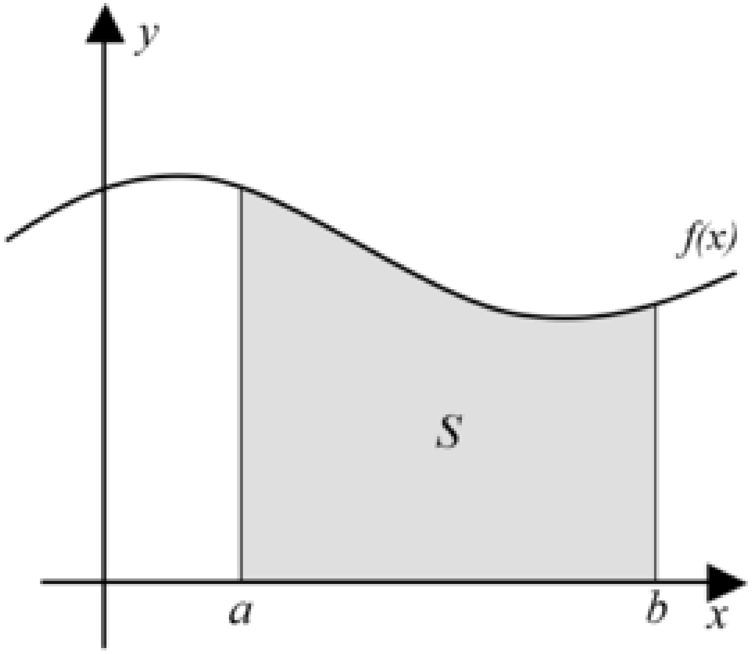
Arquimedes

A Integral

- A integral de uma função fornece a área sob o gráfico dessa função em um intervalo:

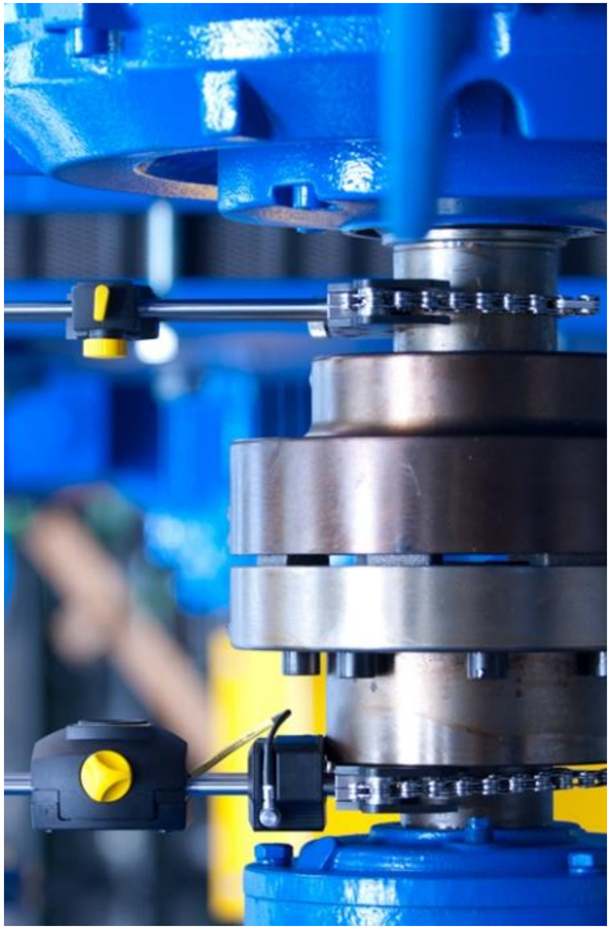
- A integral da função f no intervalo $[a, b]$ é representada por uma letra s esticada pela história:

$$\int_a^b f(x)\ dx$$



Aplicações da Integral na Engenharia

Pilares



Eixo

(Algumas) Aplicações da Integral na Física

Átomos

A mecânica quântica descreve os átomos e está condicionada a vários processos que envolvem integrais, como a normalização e o cálculo de valores esperados de grandezas para obter o princípio da incerteza.

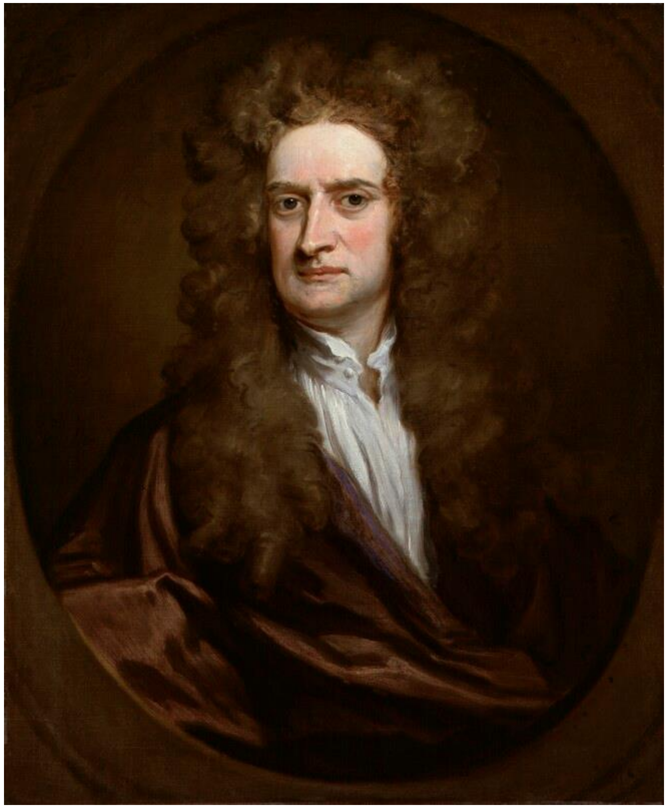
Integral de Caminho

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = \int \frac{\mathcal{D}q\mathcal{D}p}{h} \exp \frac{i}{\hbar}\left[\int_{t_i}^{t_f} dt[p\dot{q} - H(p, q)]\right]$$

Contribuição de Richard Feynman para a Teoria Quântica de Campos, que descreve as interações fundamentais da natureza através das partículas elementares, a integral de caminho é fundamental.

A derivada

- Somente na idade moderna, muitos séculos depois, é que foi desenvolvida a derivada, pelos maiores gênios do cálculo:



Newton

Leibniz

A Derivada de uma Função

- A partir de uma função $f(x)$, você estudará um processo de cálculo que permite obter uma outra função, chamada derivada de f, representada por $f'(x)$ ou por

$$\frac{df}{dx}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Que permitirá determinar a taxa de variação das funções, estudar como uma grandeza varia em relação a outra(s) e determinar retas tangentes e retas normais a curvas em qualquer ponto.

Algumas Aplicações da Derivada na Física

- As leis da física são escritas, em sua maioria, usando derivadas:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

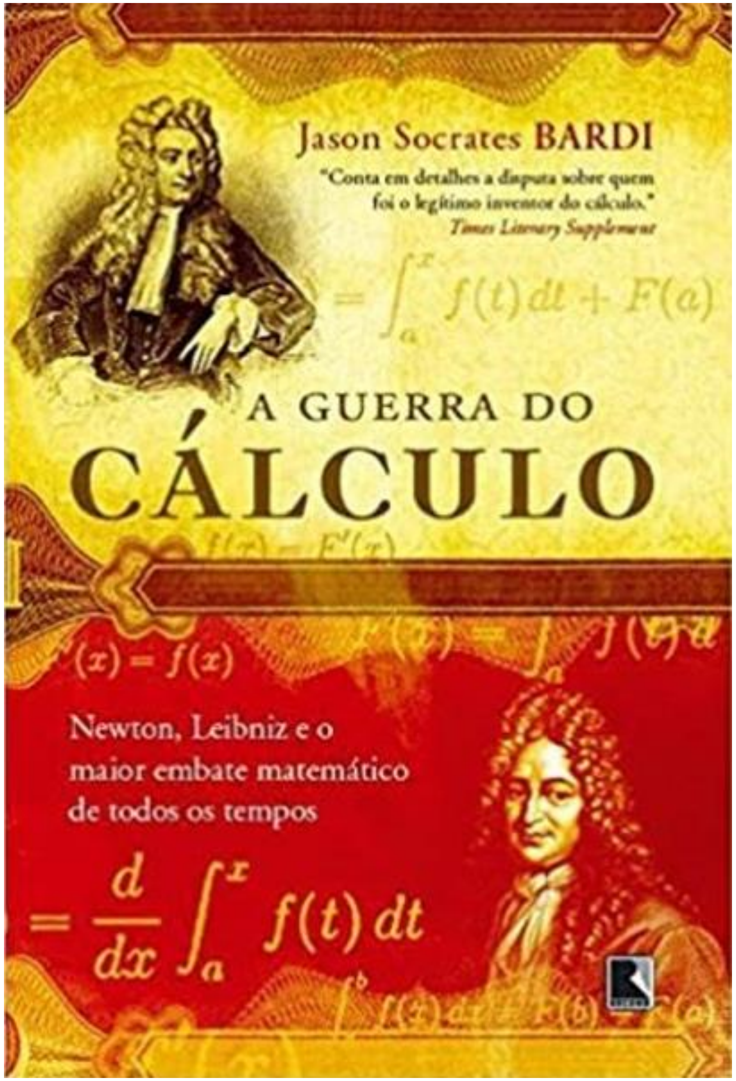
$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi + V\psi = i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t}$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R\, g_{\mu\nu} + \Lambda\, g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$dU = TdS - pdV + \mu dN$$

A briga entre Newton e Leibniz



O conceito de Limite

- No século 19 se percebeu que a integral e a derivada não tinham boas definições, podendo levar a paradoxos. Quem resolveu isso (e outras coisas) foi Karl Weierstrass:

- Ele foi o responsável por criar a definição de Limite que utilizamos até hoje, que serve de fundamento para **todo o cálculo e toda a análise matemática**.

Sobre o conceito de limite

- A definição de limite de uma função às vezes causa algum estranhamento, pois ela é a seguinte:

para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D_f$,

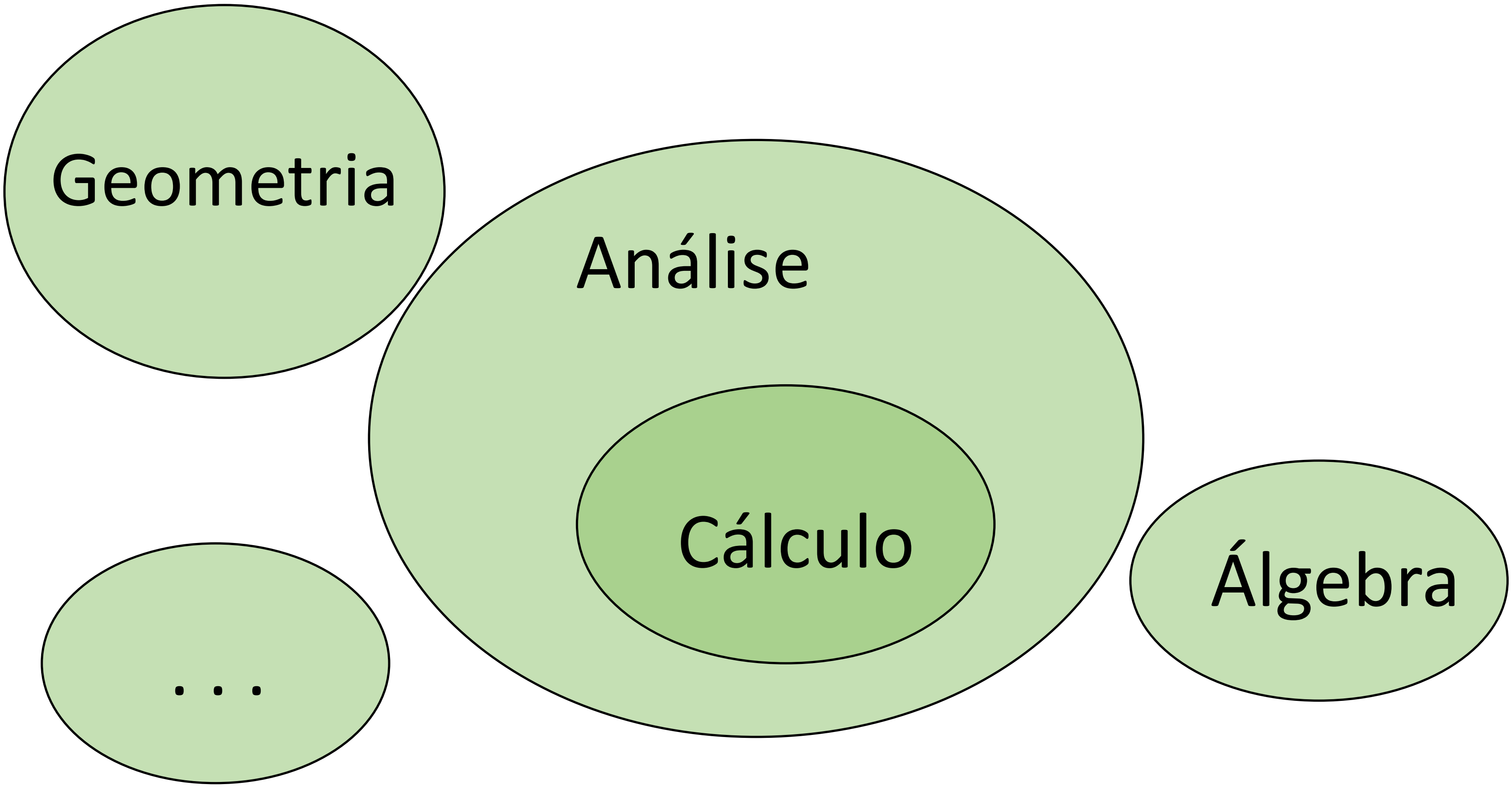
$$p - \delta < x < p + \delta, x \neq p \Rightarrow L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon.$$

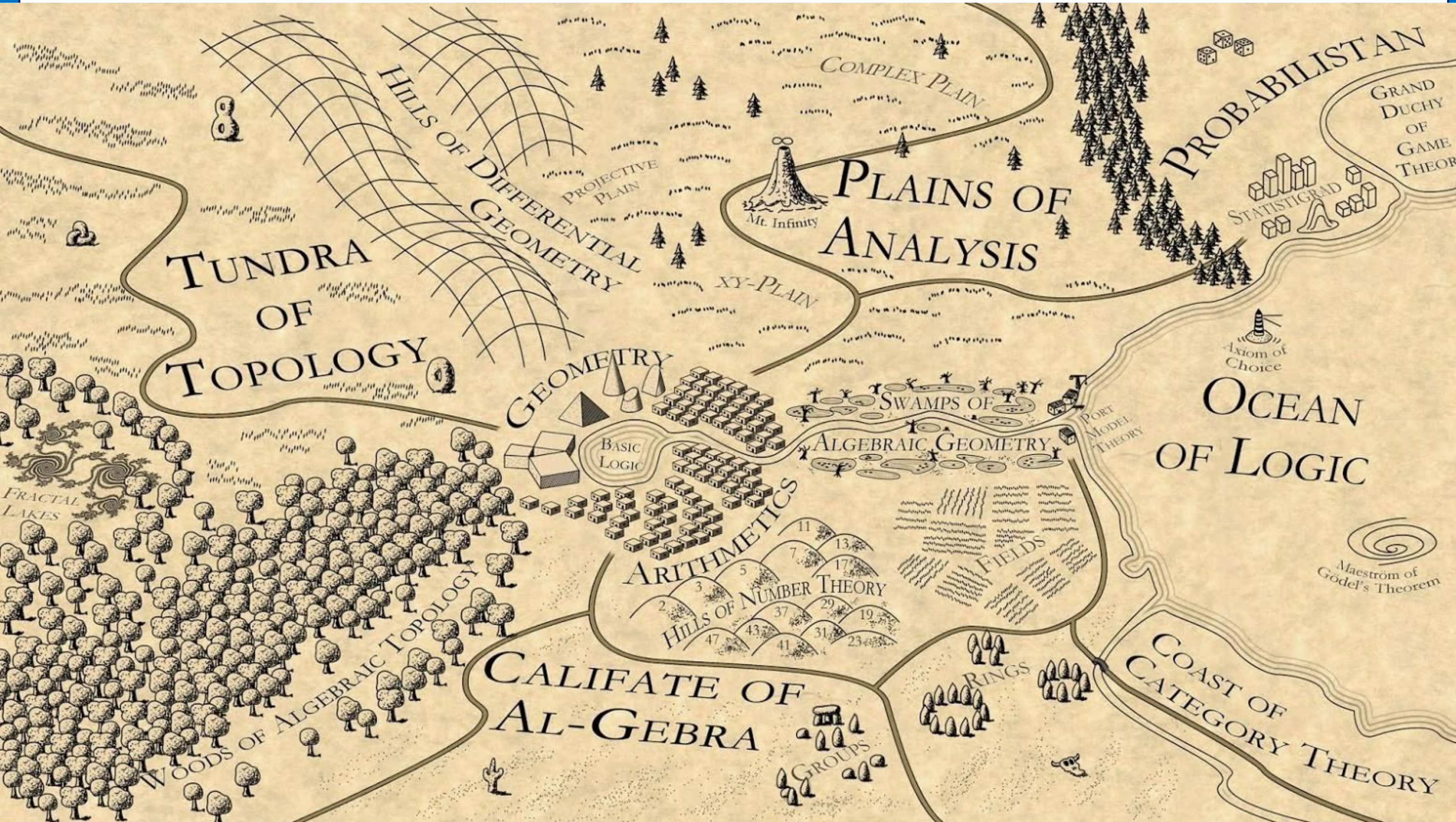
- Ou, em símbolos apenas, sem palavras:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0;\ x \in X,\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

- Ela é assim porque é o fundamento. É complicada mesmo, por isso foi a última a ser desenvolvida, séculos depois das outras.

O Cálculo no quadro geral da Matemática

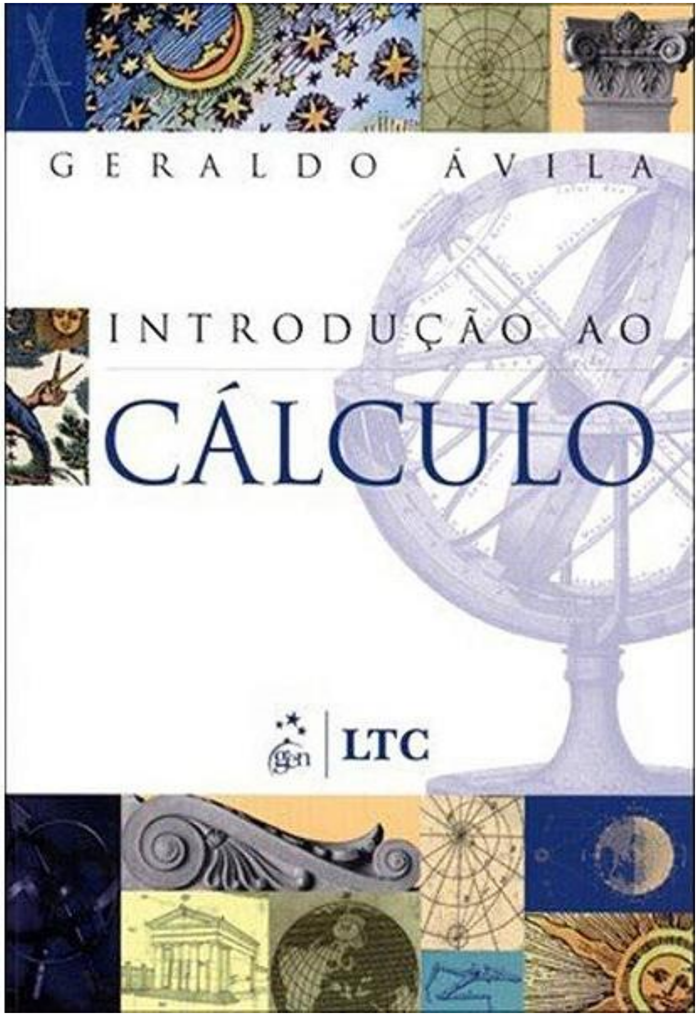




Quadro “Mathematistan” de Martin Kuppe

Dica de Livro I

- Introdução ao Cálculo, de Geraldo Ávila.
- Não há pdf na internet, mas há dezenas de exemplares na biblioteca do ICEN.



Dica de Livro II

- Cálculo, vol. I, de Anton et al.

- Livro organizado, didático, com explicações, muitos exemplos, exercícios.