Física Fundamental III

Cap. 1 – A Lei de Coulomb

Prof. Isaac Torres

Apresentação do Curso

- O Eletromagnetismo estuda uma das 4 interações fundamentais: a interação eletromagnética.

- Vamos estudar a versão clássica. Para partículas elementares, a teoria precisa de uma correção, chamada eletrodinâmica quântica, conhecida pela sigla em inglês QED.

- O Plano de curso é uma seleção do conteúdo do livro ao lado:

Fenômenos Elétricos, Magnéticos e Eletromagnéticos

Experimentos Revelam a Existência de uma Força Elétrica

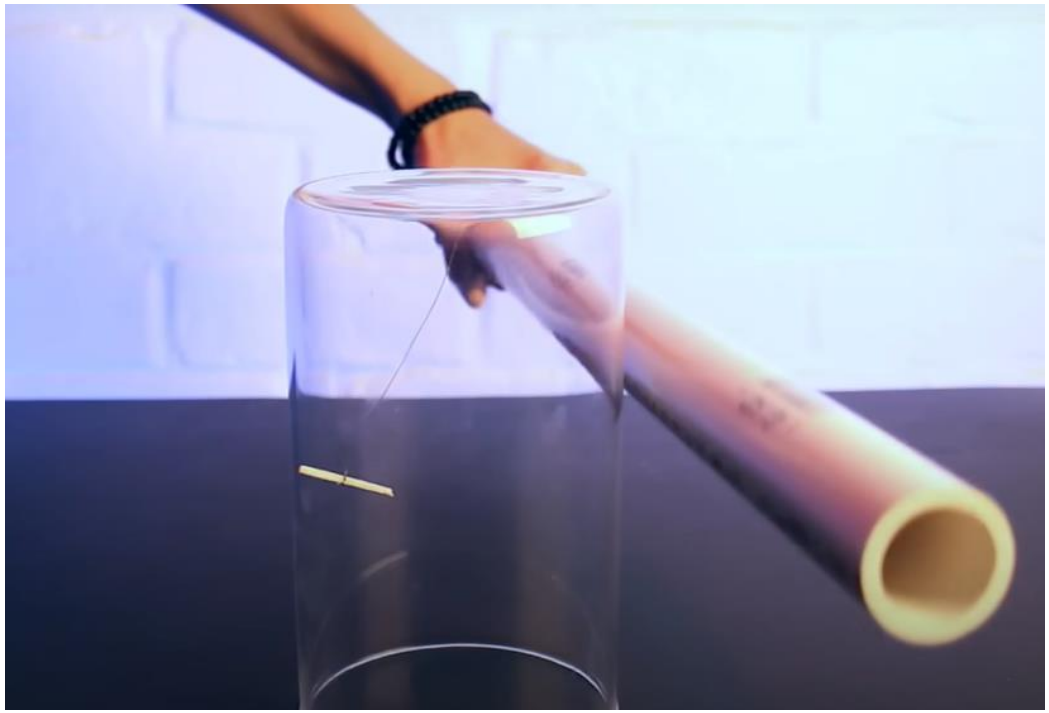
- Fontes históricas apontam que, por volta de 600 a.C., Tales de Mileto teria sido o primeiro a observar que uma resina vegetal chamada **âmbar**, em português (ἤλεκτρον em grego antigo, "**elektron**") possui propriedades de atração e repulsão, ao ser atritado com lã.

Âmbar sem polimento

Inseto preso em âmbar polido

Experimentos Revelam a Existência de uma Força Elétrica

- Há muitos experimentos possíveis. Ao atritar, por exemplo, um cano de pvc com um tecido, o cano fica carregado (negativamente) e pode atrair ou repelir pequenos objetos:

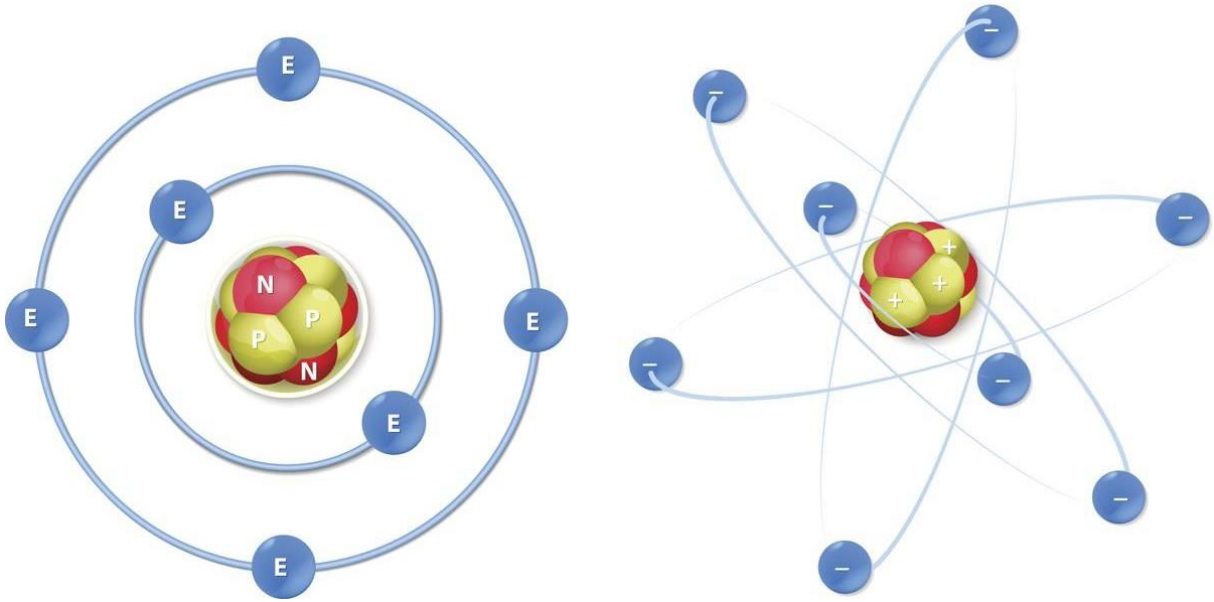


- Vídeo original: https://www.youtube.com/watch?v=ViZNgU-Yt-Y

Existe uma força elétrica

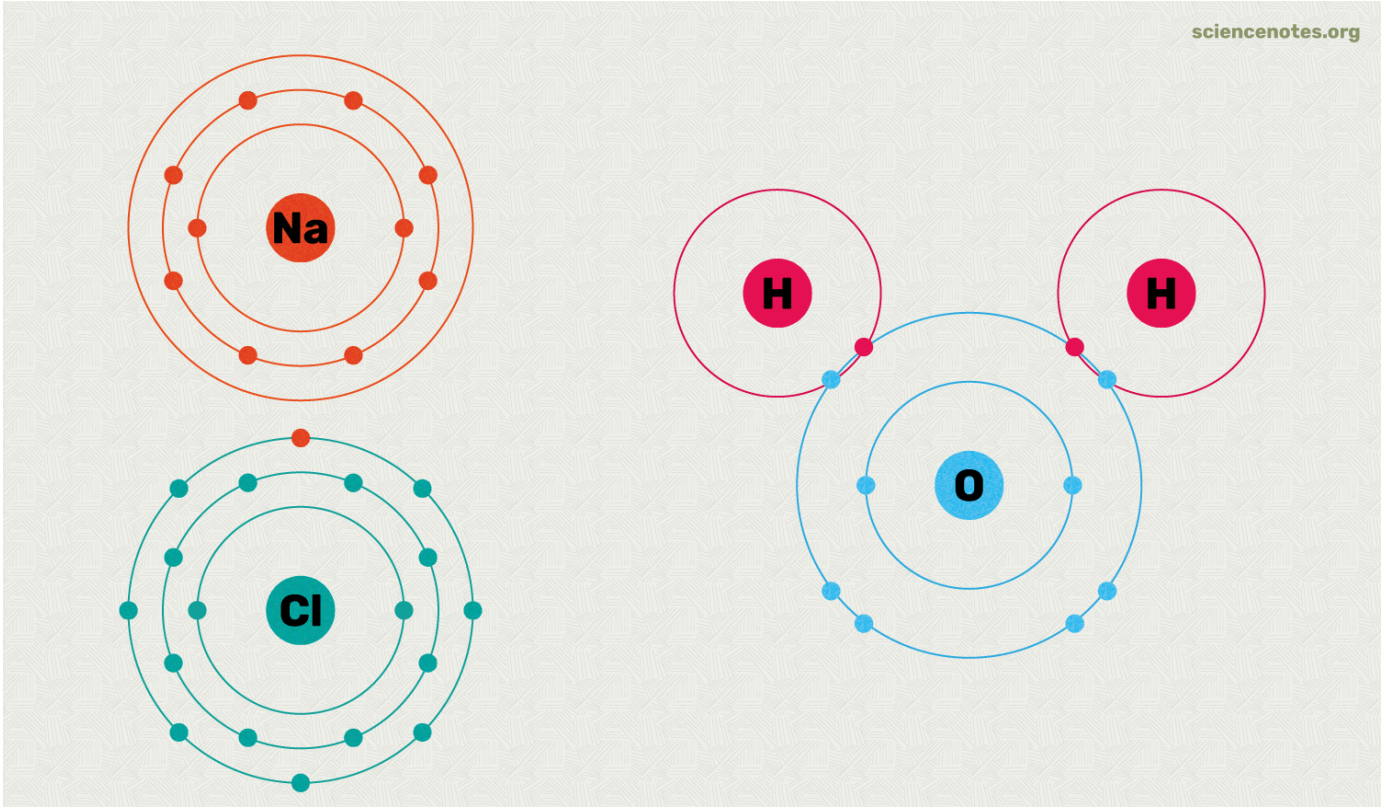
- Estes experimentos e outros semelhantes revelam a existência de uma força diferente da gravitacional, uma vez que ...
- ... a força gravitacional é sempre atrativa e esta outra força pode ser atrativa ou repulsiva.
- Esta força é chamada **força elétrica**, e constitui uma das quatro interações fundamentais da natureza.
- Vamos estudar essa força neste capítulo e suas consequências nos capítulos seguintes.
- A força gravitacional é causada por uma propriedade fundamental da matéria chamada massa, já a força elétrica é causada pela **carga elétrica**.

Fenômenos Elétricos I: a Formação dos Átomos



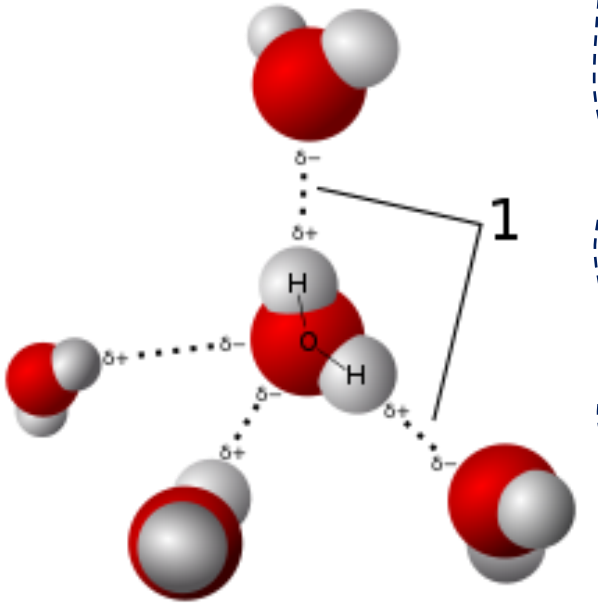
Um átomo de carbono, numa representação ilustrativa que não corresponde à realidade, baseada no modelo de Bohr. A ideia central está correta: os elétrons e os prótons se atraem eletricamente, e isso é responsável pela existência dos átomos. O porquê de os elétrons não caírem no núcleo é explicado por correções quânticas.

Fenômenos Elétricos II: Ligações Químicas

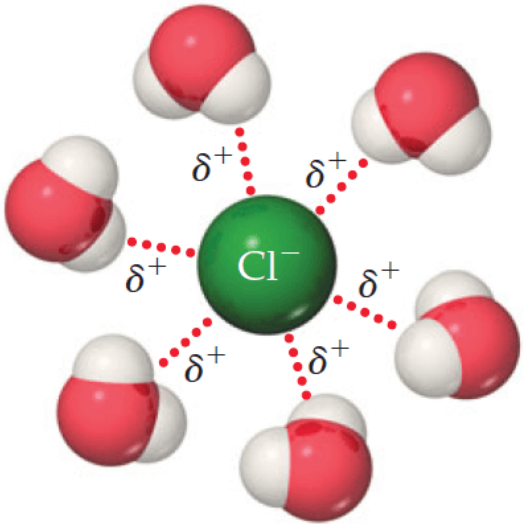


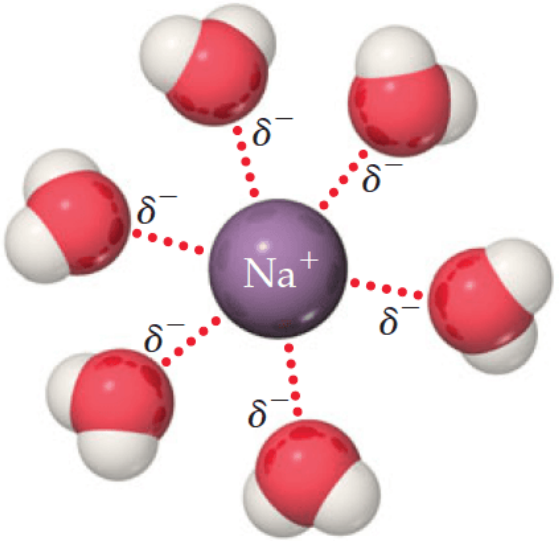
As ligações químicas são mantidas pelo equilíbrio de forças elétricas de atração e repulsão entre os componentes dos átomos. À esquerda, uma ligação iônica, à direta, uma ligação covalente, ambas regidas pela atração elétrica e a física de partículas.

Fenômenos Elétricos III: Ligações Intermoleculares



A *ponte de hidrogênio* ocorre, por exemplo, entre moléculas de água, e é uma força elétrica





A ligação do tipo *íon-dipolo*, ilustrada acima, também tem origem eletrostática

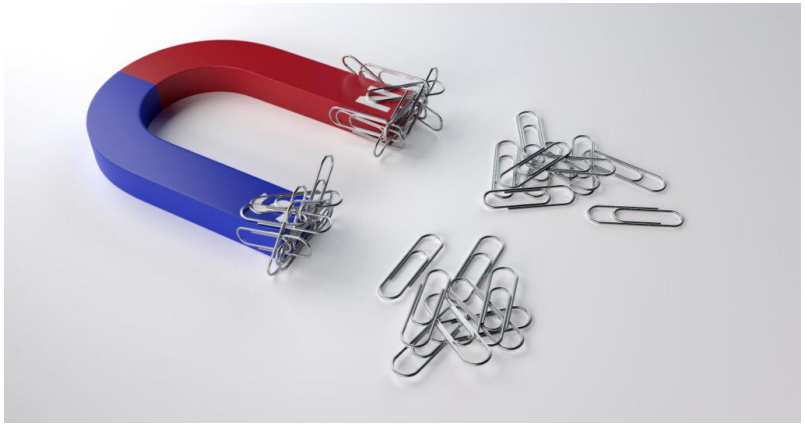
Fenômenos Elétricos IV: As correntes elétricas

A força elétrica provoca o movimento dos *portadores de carga*. Esse movimento é um fenômeno chamado *corrente elétrica*, que nos permite utilizar os equipamentos do dia-a-dia.

Fenômenos Magnéticos I: Ímãs

- Existem também os fenômenos *magnéticos*, onde surgem forças que tem um comportamento de atração e repulsão, mas que são, de algum modo, *diferentes das forças elétricas* de atração e repulsão.

- A forma mais simples de visualizar a força magnética é através de um ímã.



Ímã de Alnico

Ímãs de Neodímio

Fenômenos Magnéticos II: Bússolas

- As bússolas permitem a detecção de um campo magnético, pois elas se alinham com o campo, por motivos que serão vistos no Cap. 4.

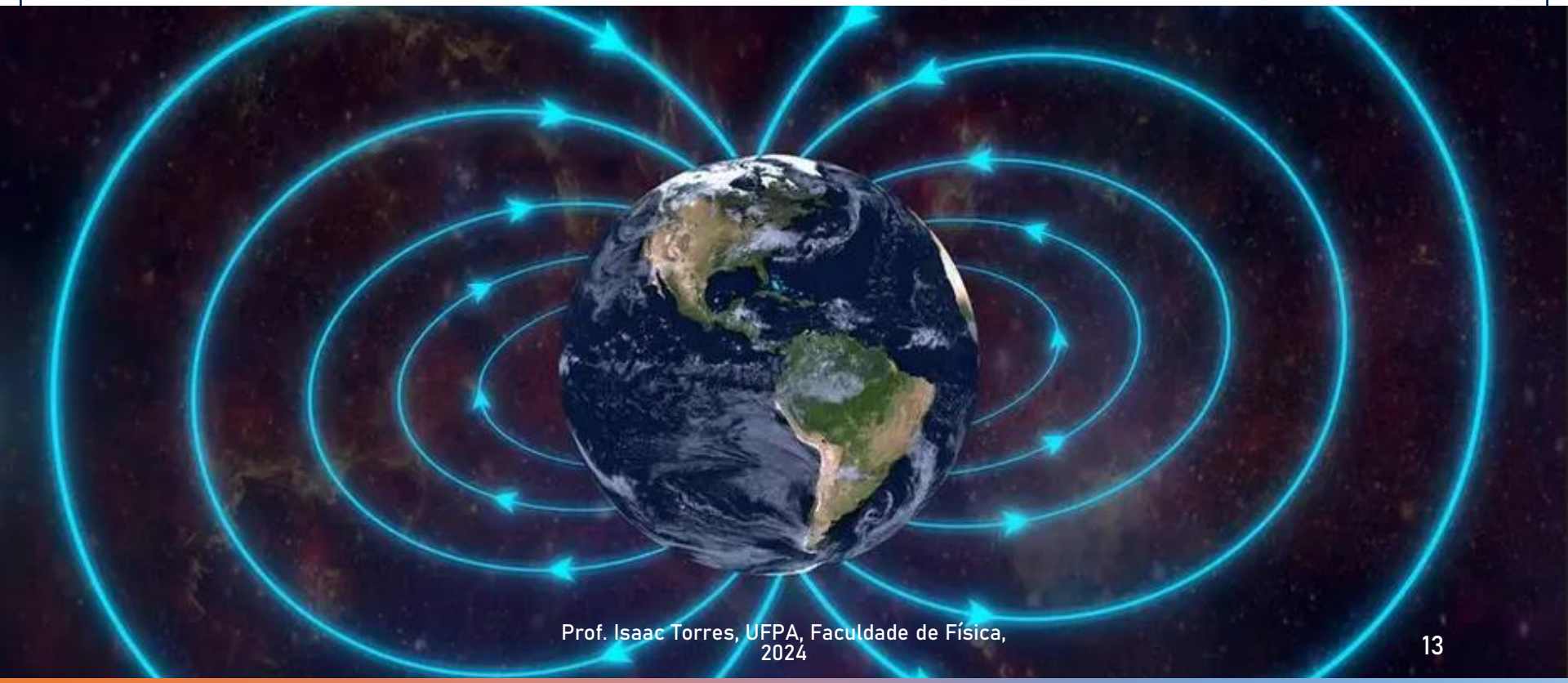
Bússola chinesa do século XVIII

Bússola atual simples

Bússola caseira com uma agulha

Fenômenos Magnéticos III: O Campo Magnético da Terra

- Correntes elétricas no interior da Terra produzem um campo magnético, o campo magnético da Terra, que pode ser sentido em todas as partes do mundo através de uma bússola.



Fenômenos Eletrodinâmicos

- Existem fenômenos que não podem ser explicados apenas pelas forças elétricas ou pelas forças magnéticas separadamente.

- São fenômenos onde ambas as forças estão presentes e interagem entre si.

- Tais fenômenos são chamados de eletromagnéticos ou, mais precisamente, *eletrodinâmicos*, uma vez que eles surgem quando as forças elétricas e magnéticas variam com o tempo.

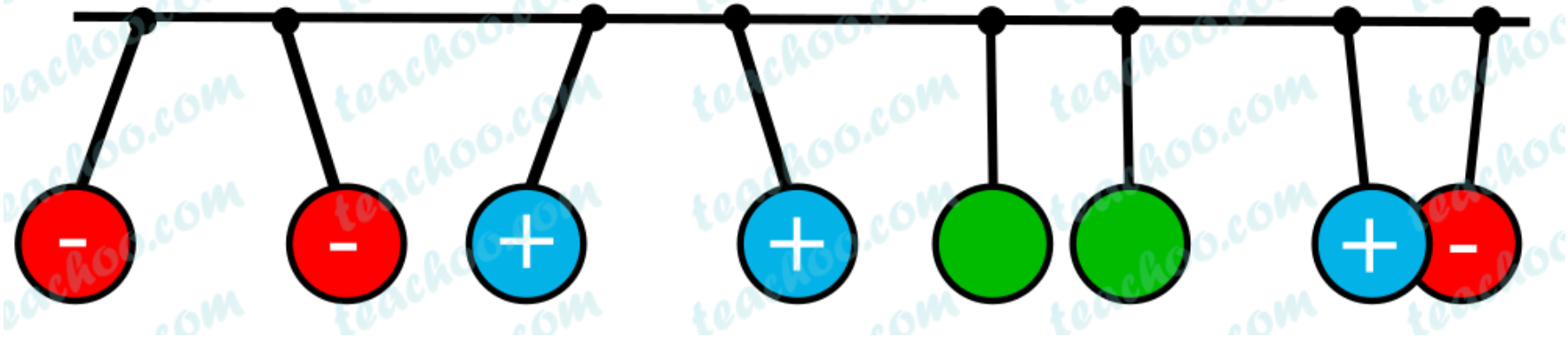
- Este é o fundamento do funcionamento de motores e da luz, por exemplo.

Fenômenos Eletrodinâmicos

Carga Elétrica e Suas Propriedades

A Gravidade é causada pela *Massa*

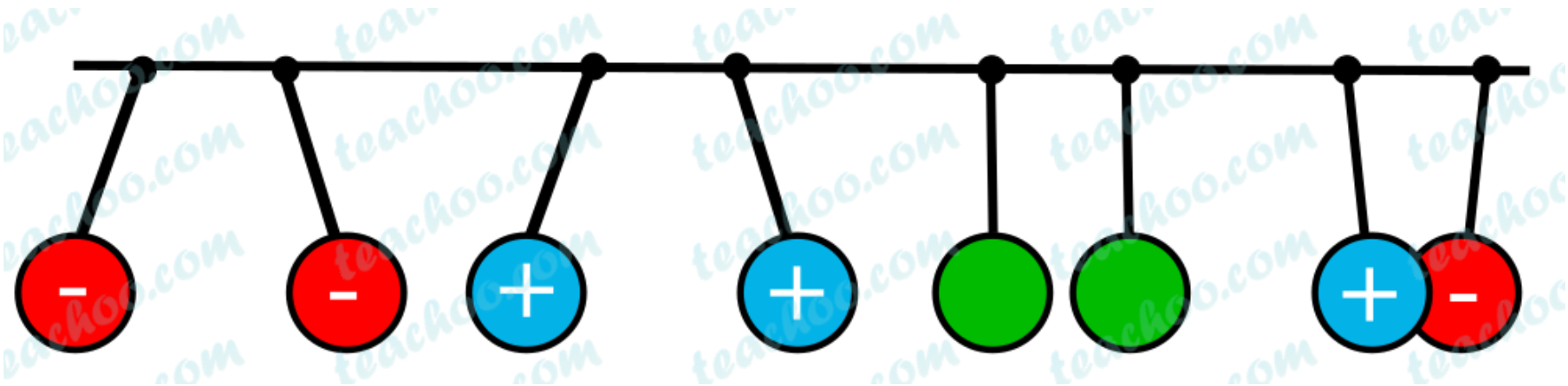
A Força Elétrica é causada pela Carga Elétrica



- Os experimentos eletrostáticos revelam a existência da carga elétrica.

- A introdução da ideia de sinal da carga permite representar os experimentos matematicamente, da seguinte forma:

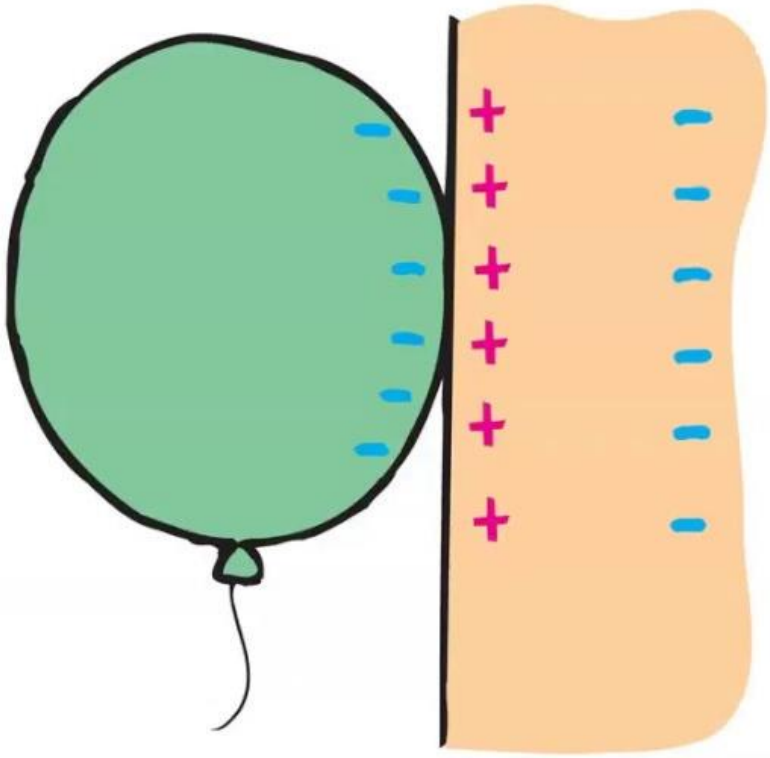
A Força Elétrica é causada pela Carga Elétrica



- Cargas de mesmo sinal, ++ ou - -, se **repelem**.
- Cargas de sinais opostos, + - ou - +, se **atraem**.
- Partículas neutras **não interagem** eletricamente.

Observação

- Um corpo neutro pode interagir eletricamente se for polarizado.
- No exemplo ao lado, o balão é negativo.
- A parede é neutra.
- Porém, a aproximação do balão negativo da parede aproxima as cargas positivas da parede, afastando as negativas da parede.
- Esse fenômeno é chamado polarização. Dizemos que a parede foi polarizada.



As Partículas Fundamentais que Constituem os Átomos

- A **origem da carga** está nas partículas fundamentais, que constituem os átomos de que tudo é feito.

- As partículas básicas do átomos são o próton, o elétron e o nêutron.

Partícula	Símbolo	Carga	Massa
Elétron	e^-	$-1{,}6 \times 10^{-19} C$	$9{,}109 \times 10^{-31}\text{kg}$
Próton	p	$+1{,}6 \times 10^{-19} C$	$1{,}673 \times 10^{-27}\text{kg}$
Nêutron	n	0	$1{,}675 \times 10^{-27}\text{kg}$
Fóton	γ	0	0

- O fóton é a partícula de luz, não é um constituinte do átomo, mas pode ser emitido ou absorvido por ele, sendo uma partícula de extrema importância.

Unidade: Coulomb

- A unidade de carga é definida a partir da corrente, pois esta pode ser medida experimentalmente com facilidade a partir do multímetro.

- Experimentalmente, se define a unidade de corrente, chamada Ampère (A).

- A partir daí (veremos depois porque) se define o Coulomb, como:

$$1C = 1A \cdot 1s$$

1 C é a carga transmitida por uma corrente de 1A em 1s

É fácil medir a corrente usando o Amperímetro

O Princípio da Conservação da Carga Elétrica

"A Quantidade Total de carga de um sistema fechado permanece constante com o tempo"

- Todos os processos físicos devem respeitar este princípio. A carga líquida, ou seja, total, não pode ser criada nem destruída em um processo físico.

Exemplo: contato de corpos carregados

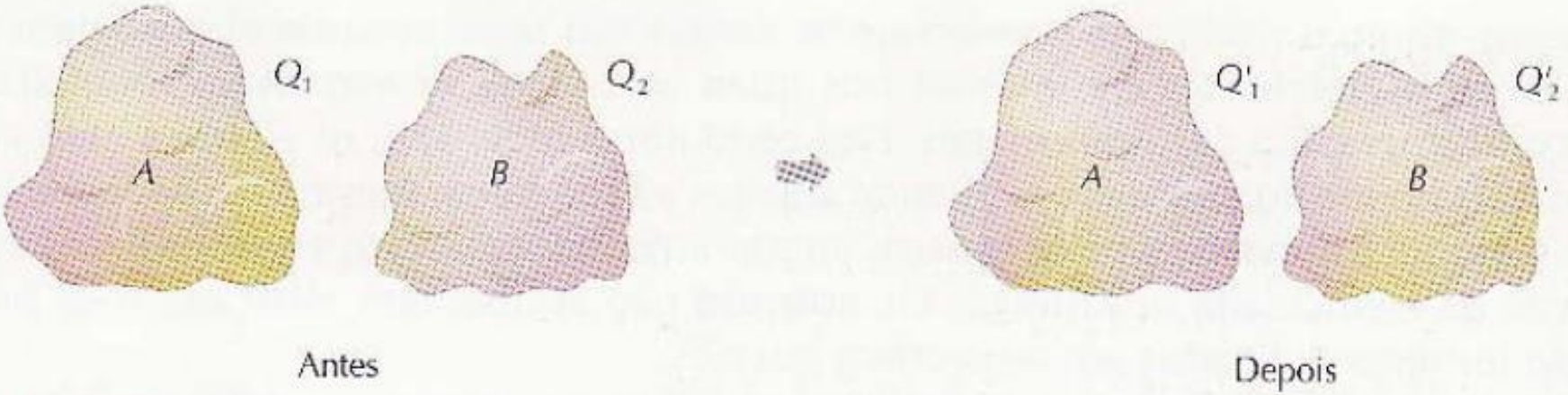


Figura 6. Os corpos *A* e *B* estão eletrizados com quantidades de cargas Q_1 e Q_2. Após a troca de cargas entre os corpos, as novas quantidades de cargas serão Q'_1 e Q'_2.

$$Q_1 + Q_2 = Q'_1 + Q'_2$$

- Quando dois corpos carregados entram em contato, mesmo que eles troquem carga, a troca deve ocorrer de tal forma que *a soma das cargas de ambos permaneça constante*.

Exemplo

Dispõe-se de quatro esferas metálicas iguais e isoladas umas das outras. Três delas (A, B e C) estão neutras e a quarta (D) está eletrizada com a carga Q. Coloca-se D em contato sucessivamente com A, B e C. Qual a carga final de D?

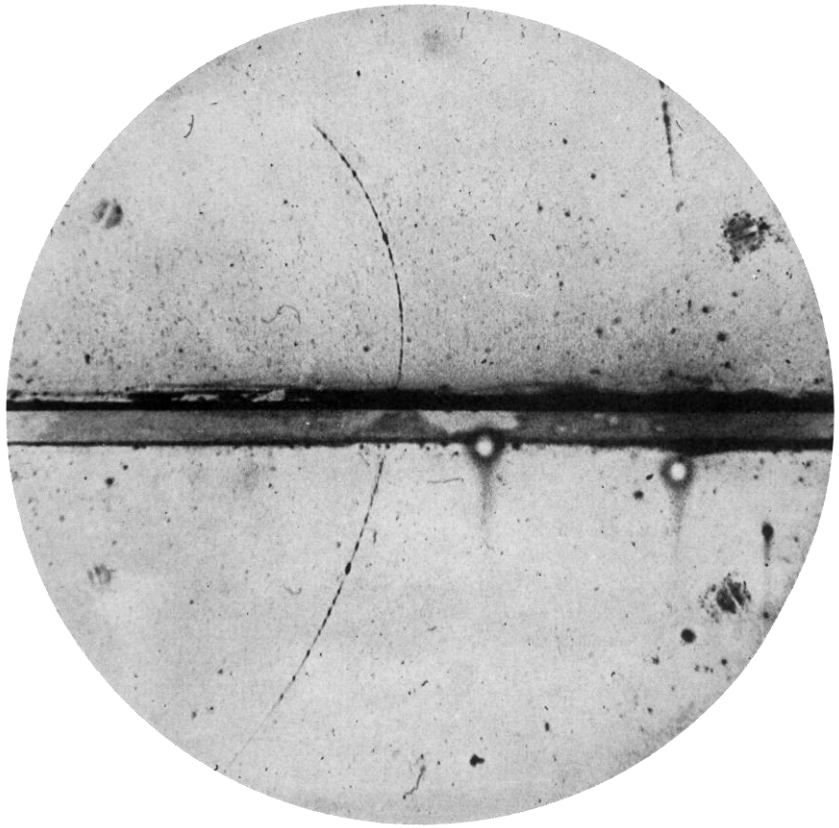
Antimatéria: o pósitron

- Existe uma partícula com todas as propriedades semelhantes ao elétron, exceto pela carga, chamada pósitron, representada por:

$$e^+$$

- Sua carga é a mesma do próton: $+1{,}6 \times 10^{-19} C$

- Sua existência foi prevista por Paul Dirac, e sua descrição faz parte da Eletrodinâmica Quântica.



Fotografia da trajetória de um pósitron realizada numa câmara de Wilson, provando a existência do pósitron.

Exemplo: aniquilação e criação de pares

- As partículas da eletrodinâmica quântica são e^-, e^+, γ.

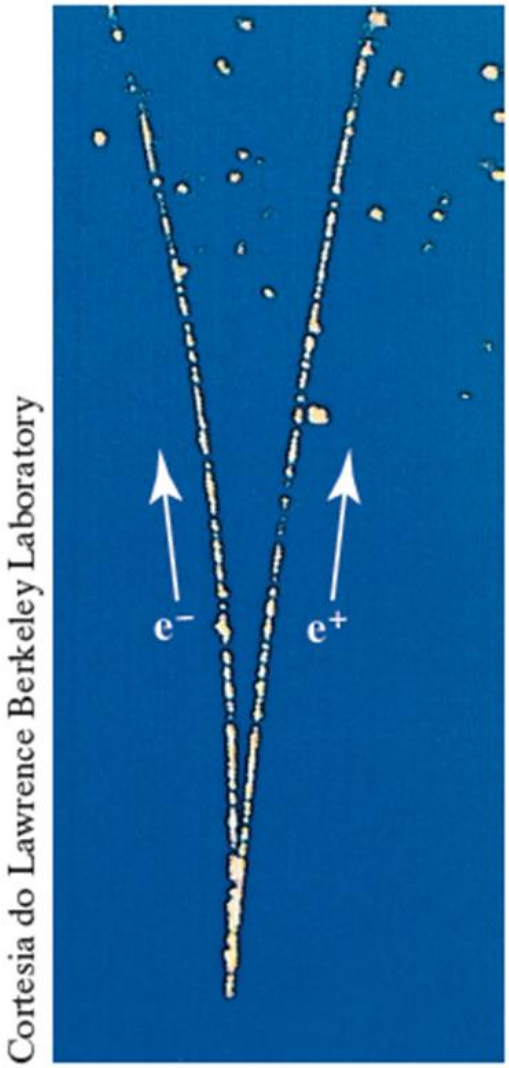
- A interação abaixo é chamada aniquilação:

$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma \qquad \text{(aniquilação)}$$

- A interação abaixo é a criação de pares:

$$\gamma \rightarrow e^- + e^+ \qquad \text{(produção de um par)}$$

- Ambas respeitam a conservação da carga, pois a carga elétrica total antes e depois da reação é a mesma, ou seja, zero.



Fotografia das trilhas deixadas por um elétron e um pósitron em uma câmara de bolhas. O par de partículas foi produzido por um raio gama que entrou na câmara, proveniente da parte inferior da fotografia. Como o raio gama é eletricamente neutro, não produz uma trilha.

Exercícios: Conservação da Carga

(UFSCar-SP) Atritando vidro com lã, o vidro se eletriza com carga positiva e a lã, com carga negativa. Atritanto algodão com enxofre, o algodão adquire carga positiva e o enxofre, negativa. Porém, se o algodão for atritado com lã, o algodão adquire carga negativa e a lã, positiva. Quando atritado com algodão e quando atritado com enxofre, o vidro adquire, respectivamente, carga elétrica:

a) positiva e positiva.
b) positiva e negativa.
c) negativa e positiva.
d) negativa e negativa.
e) negativa e nula.

(Fuvest-SP) Têm-se três esferas condutoras idênticas A, B e C. As esferas A (carga positiva) e B (carga negativa) estão eletrizadas com cargas de mesmo módulo Q, e a esfera C está inicialmente neutra. São realizadas as seguintes operações:

1ª) Toca-se C em B, com A mantida à distância, e em seguida separa-se C de B;
2ª) Toca-se C em A, com B mantida à distância, e em seguida separa-se C de A;
3ª) Toca-se A em B, com C mantida à distância, e em seguida separa-se A de B.

Podemos afirmar que a carga final da esfera A vale:

a) zero
b) $+\frac{Q}{2}$
c) $-\frac{Q}{4}$
d) $+\frac{Q}{6}$
e) $-\frac{Q}{8}$

Exercícios: Conservação da Carga

(UFF-RJ) Um aluno tem 4 esferas idênticas, pequenas e condutoras (A, B, C e D), carregadas com cargas respectivamente iguais a $-2Q$, $4Q$, $3Q$ e $6Q$. A esfera A é colocada em contato com a esfera B e a seguir com as esferas C e D. Ao final do processo a esfera A estará carregada com carga equivalente a:

a) $3Q$ **c)** $\frac{Q}{2}$ **e)** $5{,}5Q$

b) $4Q$ **d)** $8Q$

(PUC-SP) Duas esferas A e B, metálicas e idênticas, estão carregadas com cargas respectivamente iguais a 16 μC e 4 μC. Uma terceira esfera C, metálica e idêntica às anteriores, está inicialmente descarregada. Coloca-se C em contato com A. Em seguida, esse contato é desfeito e a esfera C é colocada em contato com B. Supondo que não haja troca de cargas elétricas com o meio exterior, a carga final de C é de:

a) 8 μC **c)** 4 μC **e)** nula

b) 6 μC **d)** 3 μC

Exercício: Conservação da Carga

(UFRJ) Três pequenas esferas metálicas idênticas, A, B e C, estão suspensas, por fios isolantes, de três suportes. Para testar se elas estão carregadas, realizam-se três experimentos durante os quais se verifica como elas interagem eletricamente, duas a duas:

Experimento 1

Figura a

As esferas A e C, ao serem aproximadas, atraem-se eletricamente.

Experimento 2

Figura b

As esferas B e C, ao serem aproximadas, também se atraem eletricamente.

Experimento 3

Figura c

As esferas A e B, ao serem aproximadas, também se atraem eletricamente.

Formulam-se três hipóteses:

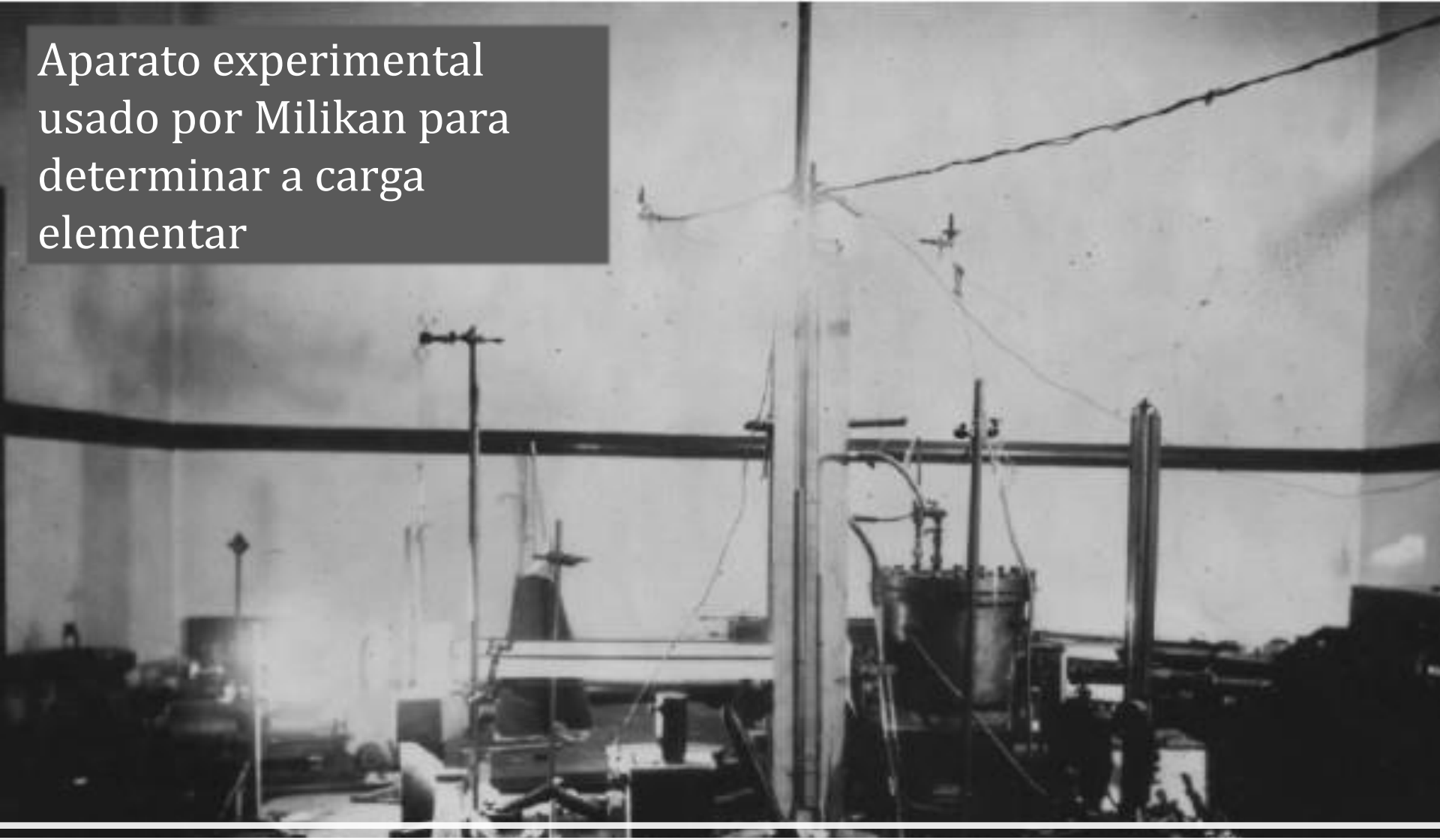
I. As três esferas estão carregadas.

II. Apenas duas esferas estão carregadas com cargas de mesmo sinal.

III. Apenas duas esferas estão carregadas, mas com cargas de sinais contrários.

Analisando os resultados dos três experimentos, indique a hipótese correta. Justifique sua resposta.

Observação: lembre-se do que foi dito no primeiro dia de aula, você deve responder de uma forma argumentativa, sucinta mas completa, que de fato justifique fisicamente a resposta. Apenas marcar a alternativa correta será considerado uma resposta inválida.



A Quantização da Carga Elétrica

O *quantum* de carga elétrica

- A conclusão dos experimentos de Milikan foi que existe uma quantidade mínima de carga, que não pode ser dividida, ou seja, o *quantum* de carga, chamado **carga elementar**, representado por e:

$$e = 1{,}6 \times 10^{-19} C$$

- Temos:

Partícula	Carga
e^-	$-e$
p	$+e$
n	0
γ	0

Valores permitidos e não permitidos de carga elétrica e a aproximação contínua

- Os valores permitidos são os múltiplos inteiros da carga elementar, que podem ser positivos:

$$0, e, 2e, 3e, 4e, 5e, \dots, 500e, \dots\ 870251e, \dots$$

- Ou negativos:

$$-e, -2e, -3e, -4e, -5e, \dots, -500e, \dots - 870251e, \dots$$

- Não são possíveis, por exemplo:

$$0{,}6e, -\pi e, -\sqrt{3}e, e^2$$

Quando podemos desconsiderar a quantização?

- Em fenômenos da escala atômica, molecular e nanométrica, a quantização da carga é fundamental.
- Porém, para fenômenos macroscópicos, podemos desconsiderar a quantização e fazer uma aproximação de que a carga se distribui de forma contínua.
- É a chamada aproximação do contínuo.
- Ao nos aproximarmos da areia da praia, vemos que ela é feita de minúsculas pedras. Porém, ao nos afastarmos, 1 grão de areia a mais ou a menos não faz diferença para o número de grãos na praia.

Resumo

- ✓ Há três tipos de partículas e corpos: positivos, negativos e neutros.
- ✓ Cargas de mesmo sinal se repelem, de sinais contrários se atraem.
- ✓ A Carga é conservada em qualquer processo físico.
- ✓ A Carga é quantizada.

Exemplos/Exercícios

Diga se os valores de carga a seguir são fisicamente possíveis:

a. $q_1 = 169 \cdot 10^{-19}\mathrm{C}$

b. $q_2 = -1{,}136 \cdot 10^{-17}\mathrm{C}$

c. $q_3 = 25\ \mathrm{e}$

d. $q_4 = -0{,}4\ \mathrm{e}$

e. $q_5 = 10\mathrm{C}$

f. $q_6 = 25\mathrm{C}$

g. $q_7 = 8{,}00 \times 10^{6}\mathrm{C}$

Exemplo

P.6 Se um corpo inicialmente neutro é eletrizado com uma carga $Q = -56$ mC, quantos elétrons ele recebeu nesse processo? Dado: $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C

Força Elétrica e Lei de Coulomb

A Lei de Coulomb Escalar

- De volta à **força elétrica**.
- Falamos dela **qualitativamente**, sobre **atração e repulsão**.
- Precisamos tornar precisas essas ideias, através de uma **"lei" matemática**, ou seja, uma equação capaz de predizer o valor da força elétrica entre duas partículas portadoras de carga.
- Será tema de um seminário contar como Charles Augustin de Coulomb determinou essa lei, chamada **Lei de Coulomb** em sua homenagem.
- Vejamos sua **expressão matemática** e seu **significado**, primeiro a versão simplificada, escalar, e depois a lei de Coulomb completa, na sua forma vetorial.

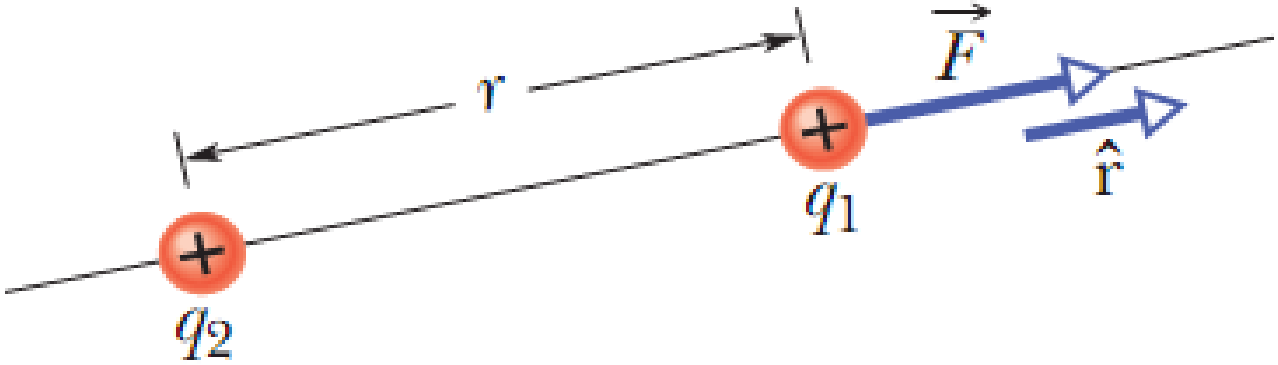
A Lei de Coulomb Escalar

- Pensando nos exemplos vistos de atração e repulsão, considere duas partículas carregas, uma com carga q_1 (que pode ser $+$, $-$ ou 0) e outra com uma carga q_2 (que também pode ser $+$, $-$ ou 0).

- Ambas estão separadas por uma distância r. Então, o módulo da força entre elas é dado pela equação ao lado.

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r^2}$$

Obs.: a figura ao lado ilustra como seria essa situação para duas cargas positivas, mas a expressão permanece válida para todas as outras situações.



A Lei de Coulomb Escalar

- A constante que aparece na Lei de Coulomb anterior, o "épsilon zero" ε_0 é uma constante física fundamental, chamada **permissividade elétrica do vácuo**.
- Essa nomenclatura faz sentido apenas quando estudamos o campo elétrico na matéria, mas o valor da constante é:

$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12} C^2/Nm^2$$

- Também é comum escrever a Lei de Coulomb na forma:

$$F = k \cdot \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r^2}$$

- Onde a constante eletrostática k vale

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8{,}99 \times 10^9 Nm^2/C^2$$

Interpretação da Lei de Coulomb

- Note a **semelhança** com a lei da gravitação universal newtoniana.

- A força (em módulo) é **proporcional ao produto das cargas**, i.e., quanto mais carga, mais força; quanto menos carga, menos força, de forma proporcional.

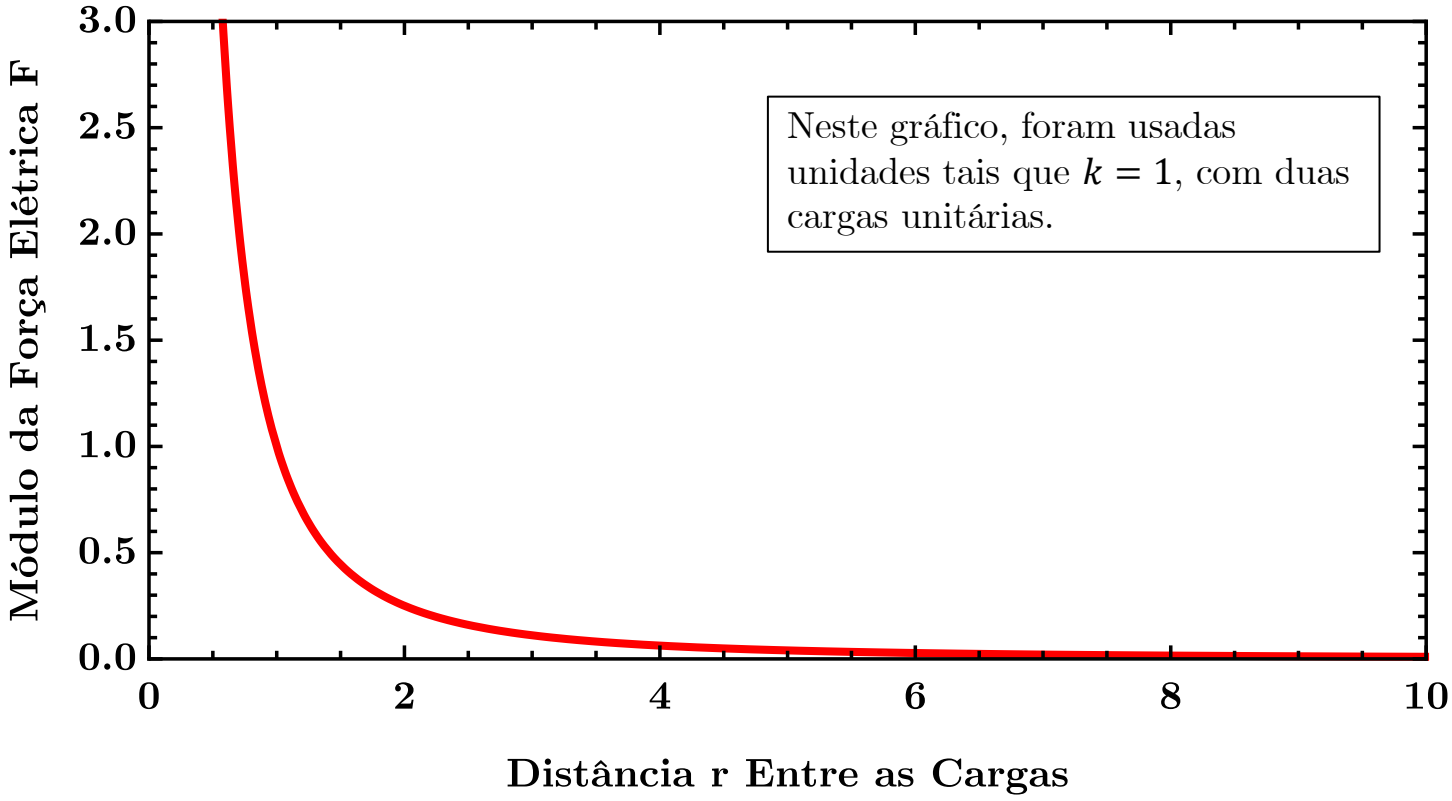
- A força é do tipo proporcional ao **inverso do quadrado da distância**:

$$F(r) \sim \frac{1}{r^2}$$

- Há uma semelhança com várias outras situações da natureza, nas quais ocorre uma difusão em frentes esféricas, como: *intensidade luminosa, intensidade sonora e interação gravitacional*.

A Lei do Inverso do Quadrado

- Ao se afastar, a força não diminui proporcionalmente, ele diminui muito mais rápido: dobrando a distância, a força se reduz a 25% do que era.
- Ao se aproximarem as cargas, a força não aumenta proporcionalmente, ele aumenta muito mais: chegando duas vezes mais perto, a força aumenta para 4 vezes a inicial.



Exemplo

A distância média r entre um elétron e um próton em um átomo de hidrogênio é de $5{,}3 \times 10^{-11}$ m. (*a*) Qual o valor médio da força eletrostática que age entre essas partículas? (*b*) Qual a intensidade média da força gravitacional que age entre essas partículas?

Exemplos/Exercícios

Considere duas partículas de cargas q_1 e q_2 separadas por uma distância r. Com esses valores, descobrimos que a força de atração entre as partículas é F, pela lei de Coulomb. Alterando os valores das cargas e/ou da distância entre elas, a força passa a ser $\tilde{F}$. Escreva $\tilde{F}$ em função de F quando:

a. q_1 dobra.
b. q_2 se reduz a $1/3$ do valor.
c. A distância r dobra.
d. A distância r se reduz à metade.
e. q_1 aumenta 23%, q_2 diminui 15% e a distância se reduz a 1%.
f. q_1 diminui 23%, q_2 diminui a 34% e a distância triplica.

Exemplos

2. Duas pequenas esferas no vácuo estão eletrizadas com cargas elétricas $q = -2{,}0\ \mu C$ e $Q = +3{,}0\ \mu C$. A distância que as separa é 1,0 m. Calcular a intensidade da força eletrostática. Dizer se se trata de atração ou de repulsão. É dada a constante eletrostática: $K_0 = 9{,}0 \cdot 10^9$ unidades do SI.

3. Duas partículas *A* e *B* eletrizadas, no vácuo, estão separadas uma da outra pela distância de 10 cm. A partícula *A* tem carga elétrica de 2,0 μC, enquanto *B* tem carga desconhecida. A força eletrostática com que se repelem tem intensidade de 5,4 N e a constante eletrostática no vácuo é $K_0 = 9{,}0 \cdot 10^9\ N \cdot m^2/C^2$. Determine a carga da partícula *B*.

Exemplo

6 Duas cargas elétricas puntiformes de valor q e Q estão separadas por distância d e repelem-se com força de intensidade F (Fig. a). Duplica-se a primeira carga, divide-se a segunda por 3 e dobra-se a distância. A nova força elétrica passa a ter intensidade F' (Fig. b). É dada a constante eletrostática: K.

Determinar:

a) F e F' em função de q, Q, d e K;
b) F' em função de F.

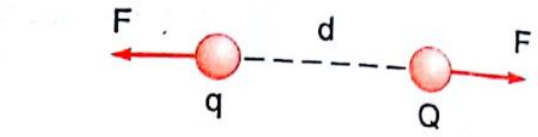


Fig. a

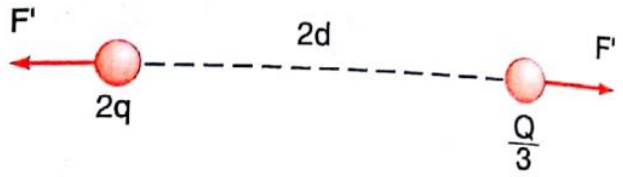


Fig. b

Exercícios

7. Duas cargas elétricas puntiformes separadas por uma dada distância repelem-se com força de intensidade F. Se reduzirmos a distância à terça parte, sem contudo alterar as cargas, qual será a intensidade da nova força?

8. Entre duas partículas eletrizadas, no vácuo e a uma distância d, a força de interação eletrostática tem intensidade F. Se dobrarmos as cargas das duas partículas e aumentarmos a separação entre elas para 2d, ainda no vácuo, qual a intensidade F' da nova força de interação eletrostática? Dê a resposta em função de F.

P.5 Duas cargas elétricas positivas e puntiformes, das quais uma é o triplo da outra, repelem-se com forças de intensidades 2,7 N no vácuo, quando a distância entre elas é de 10 cm. Determine a menor das cargas.

Vetores: uma breve Revisão

Justificativa

- Para descrevermos quantitativamente os fenômenos eletromagnéticos, precisamos de vetores, pois as forças são grandezas vetoriais, que dependem de um módulo, uma direção e um sentido.
- As Equações de Maxwell (abaixo) que descrevem todo o eletromagnetismo são equações que dizem como se comportam os vetores $\vec{E}$ e $\vec{B}$.

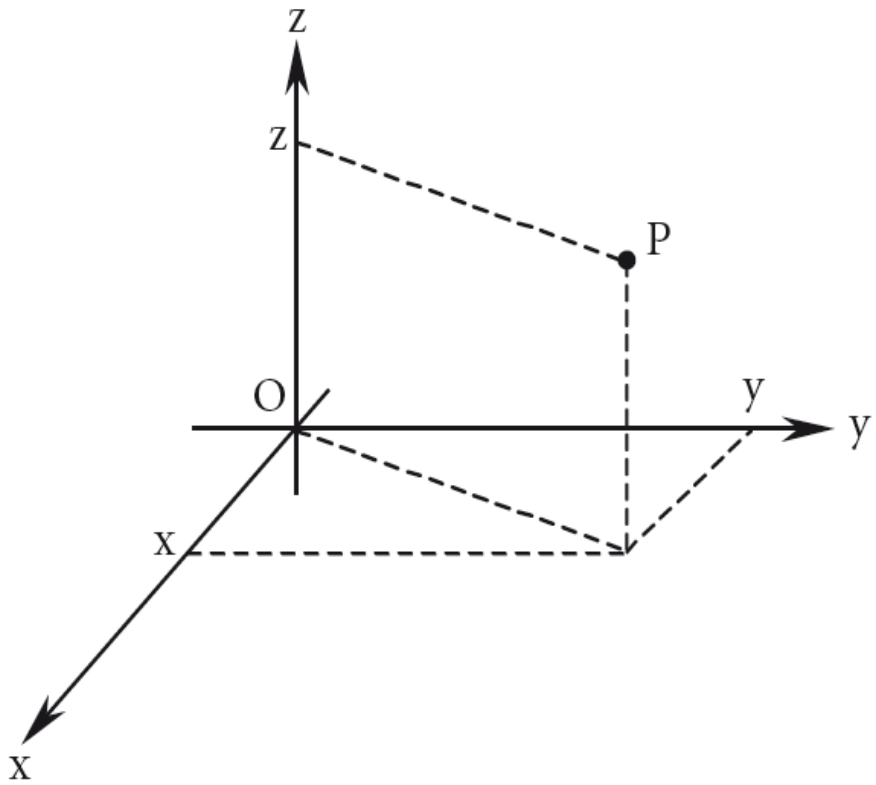
Integral equations	Differential equations
$\oiint_{\partial\Omega} \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{\Omega}\rho\,\mathrm{d}V$	$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
$\oiint_{\partial\Omega} \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = 0$	$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$
$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_{\Sigma}\mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$	$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$
$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \mu_0\left(\iint_{\Sigma}\mathbf{J}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} + \varepsilon_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_{\Sigma}\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}\right)$	$\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\left(\mathbf{J} + \varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)$

Vetores no Espaço $\mathbb{R}^3$ e sua representação: $\vec{u} = u_x\hat{\imath} + u_y\hat{\jmath} + u_z\hat{k}$

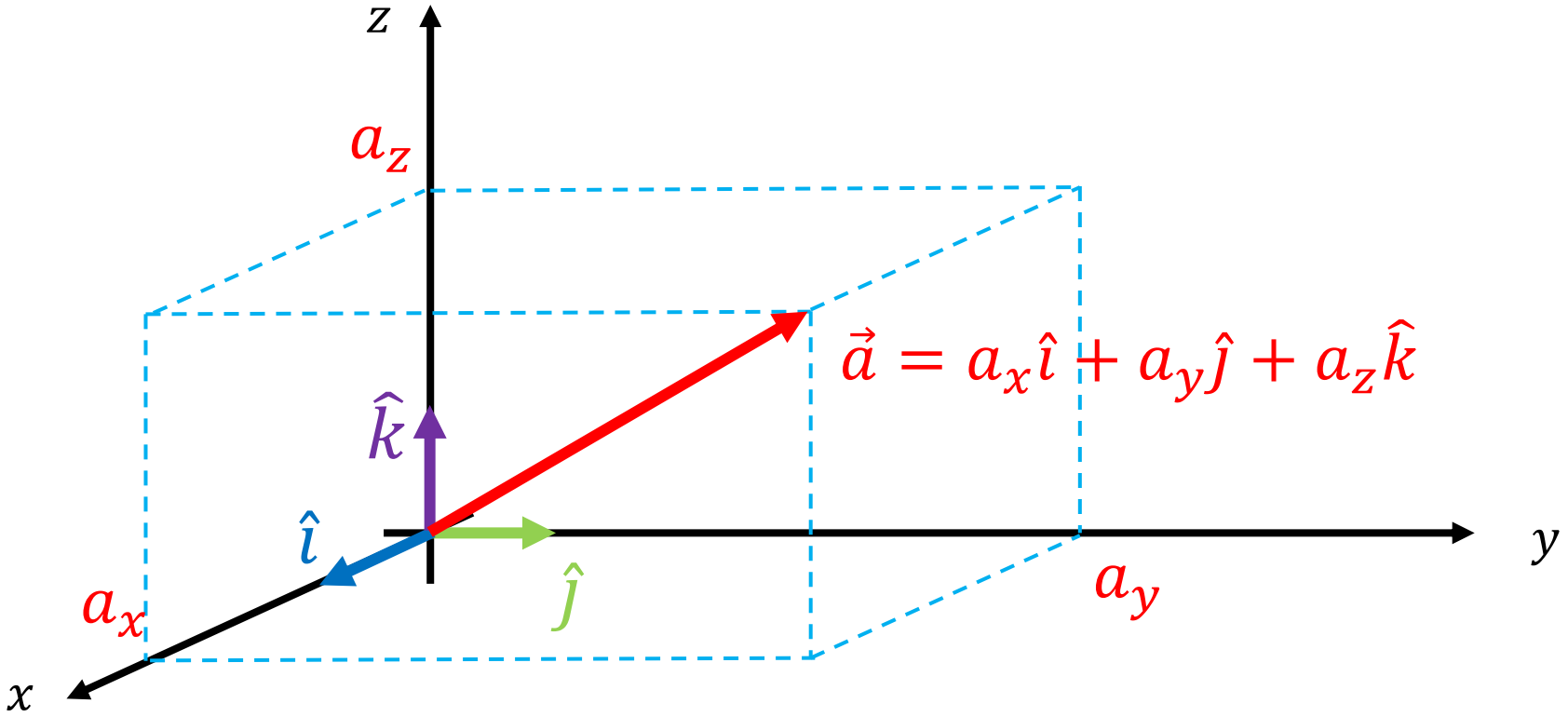
- Marcando um ponto no espaço:
- Devemos projetar o ponto sobre os três eixos, obtendo suas coordenadas x, y e z.
- Escrevemos

$$P(x, y, z)$$

- para representar o ponto P.



Os versores $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$



Soma, Multiplicação por Escalar, Módulo e Normalização de um Vetor no Espaço $\mathbb{R}^3$

- Todas as operações são iguais, apenas acrescentando a coordenada z.

- Dados os vetores $\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$ e $\vec{b} = b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}$ e dado um número real λ, definimos:

  - $\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\hat{\imath} + (a_y + b_y)\hat{\jmath} + (a_z + b_z)\hat{k}$.

  - $\lambda\vec{a} = \lambda \cdot a_x\hat{\imath} + \lambda \cdot a_y\hat{\jmath} + \lambda \cdot a_z\hat{k}$

- A interpretação geométrica é semelhante ao caso do plano.

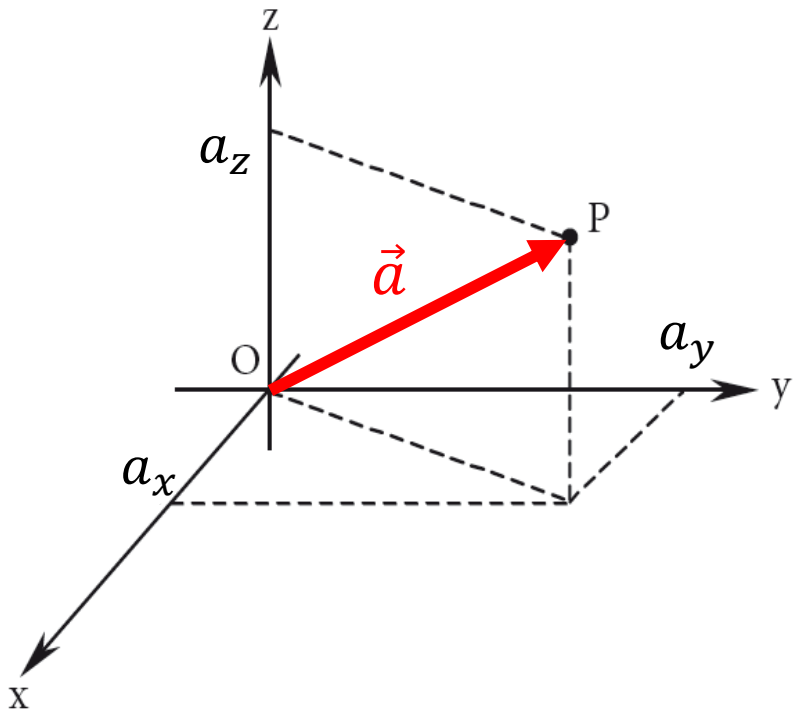
Módulo de um vetor no espaço $\mathbb{R}^3$

- Calculando a distância entre a origem O e a projeção do vetor no plano xy,no ponto Q, encontramos a distância $\sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.

- Considerando o triângulo retângulo OPQ, a sua hipotenusa é o módulo do vetor $\vec{a}$.

- Aplicando o Teorema de Pitágoras novamente, encontra-se:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$



Normalização

- A normalização é feita do mesmo modo, tomando o cuidado de levar em conta a terceira coordenada:

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

Exemplo

- Dados os vetores $\vec{r} = -3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 5\hat{k}$ e $\vec{r}' = 4\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 7\hat{k}$, sendo

$$\vec{R} \equiv \vec{r} - \vec{r}'$$

- Determine o versor $\hat{R}$.

- **Observação:** este tipo de cálculo será útil em vários momentos ao longo da disciplina.

- Sempre teremos a mesma definição $\vec{R} \equiv \vec{r} - \vec{r}'$.

Exercícios

1. Dados os vetores $\vec{r} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath}$ e $\vec{r}' = -\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 2\hat{k}$, determine $\hat{R}$, .

2. Dados os vetores $\vec{r} = 6\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 4\hat{k}$ e $\vec{r}' = 8\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} - 2\hat{k}$, determine $\hat{R}$.

3. Dados os vetores $\vec{r} = -5\hat{\jmath}$ e $\vec{r}' = -8\hat{\imath} + 9\hat{\jmath}$, determine $\hat{R}$.

4. Dados os vetores $\vec{r} = -\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 4\hat{k}$ e $\vec{r}' = -2\hat{\imath} + 10\hat{\jmath} + 3\hat{k}$, determine $\hat{R}$.

Exemplos/Exercícios

- **Exemplo.** Para um vetor qualquer não-nulo $\vec{u}$, mostre que

$$\frac{\vec{u}}{u^3} = \frac{1}{u^2}\hat{u} \ .$$

- **Exercício 5.** Para os vetores anteriores, calcule $\vec{R}/R^3$.

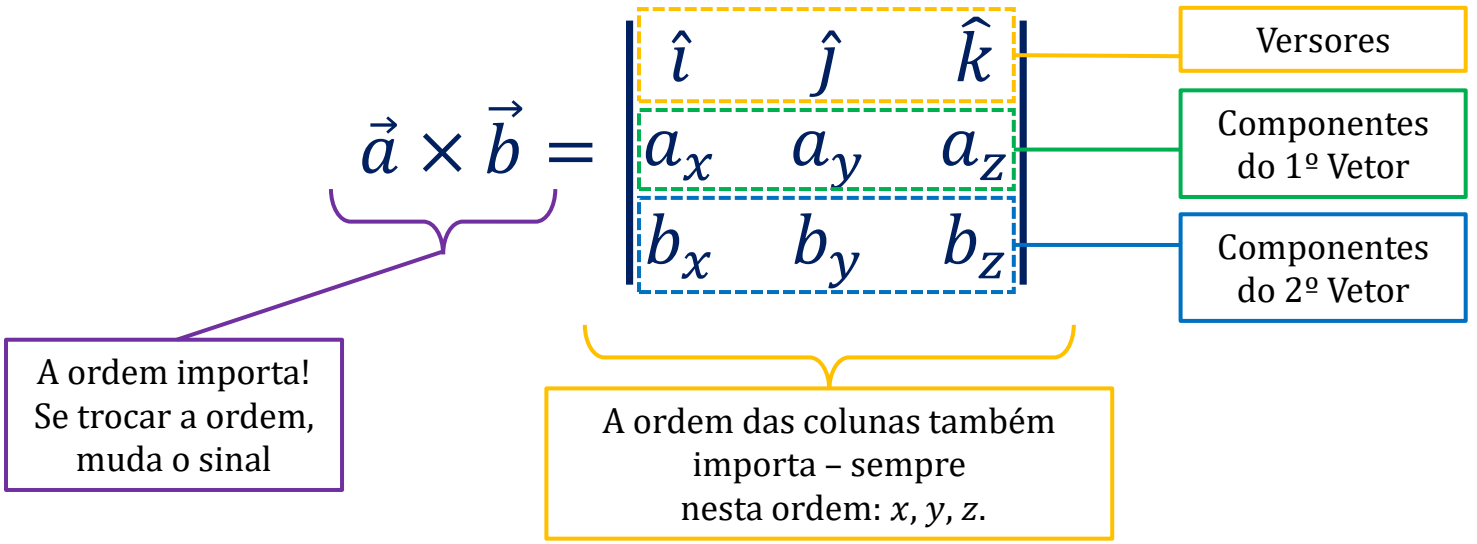
Produto Vetorial

- Dados os vetores $\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$ e $\vec{b} = b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}$, o produto vetorial de $\vec{a}$ com $\vec{b}$, nesta ordem, representado por $\vec{a} \times \vec{b}$, é o vetor do espaço $\mathbb{R}^3$ cujas componentes são:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\hat{\imath} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{\jmath} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k}$$

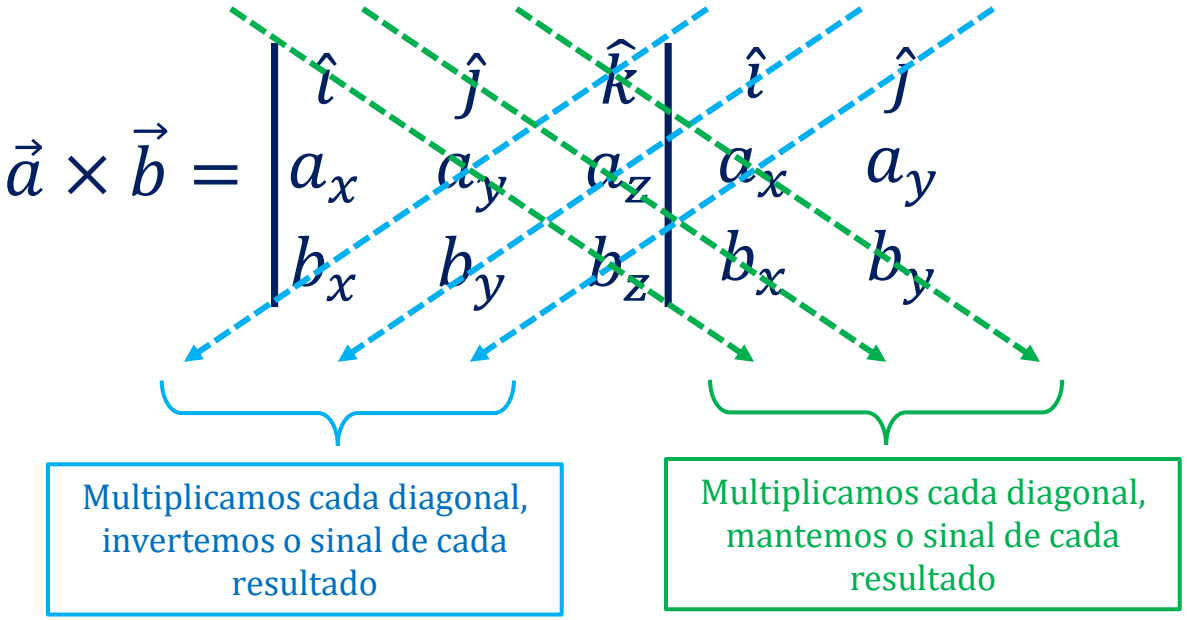
Como Entender essa expressão?

- É mais fácil aplicar essa definição se a representarmos como se fosse o determinante de uma matriz, da seguinte forma:



Como Efetuar esse cálculo?

- Basta usar a definição de determinante 3×3:



Exemplos

- Considere os vetores abaixo:

$$\vec{u} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}, \qquad \vec{v} = -2\hat{i} - 7\hat{j} - \hat{k}, \qquad \vec{w} = 5\hat{i} - 7\hat{k}$$

- Calcule:

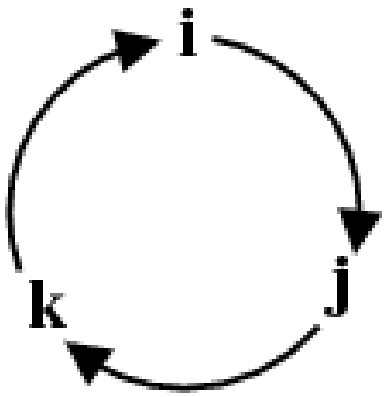
a) $\vec{u} \times \vec{v}$

b) $\vec{v} \times \vec{w}$

c) $\vec{u} \times \vec{w}$

Algumas Regras Práticas

- Para vetores simples ou com expressões algébricas (“letras”), pode ser bem mais prático usar a distributividade e a relação entre os versores:



$$\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=0,$$

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k},\quad \mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k},$$

$$\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j},\quad \mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j},$$

$$\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j},\quad \mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i}.$$

- Produto de versores iguais dão zero.
- Produtos no sentido horário dão +
- Produtos no sentido anti-horário dão –

Exemplos/Exercícios

- Use as regras anteriores para calcular os produtos vetoriais abaixo:

a) $-4\hat{\imath} \times \left(3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 5\hat{k}\right)$

b) $10\hat{\jmath} \times \left(\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + 2\hat{k}\right)$

c) $-\hat{k} \times \left(-8\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 789\hat{k}\right)$

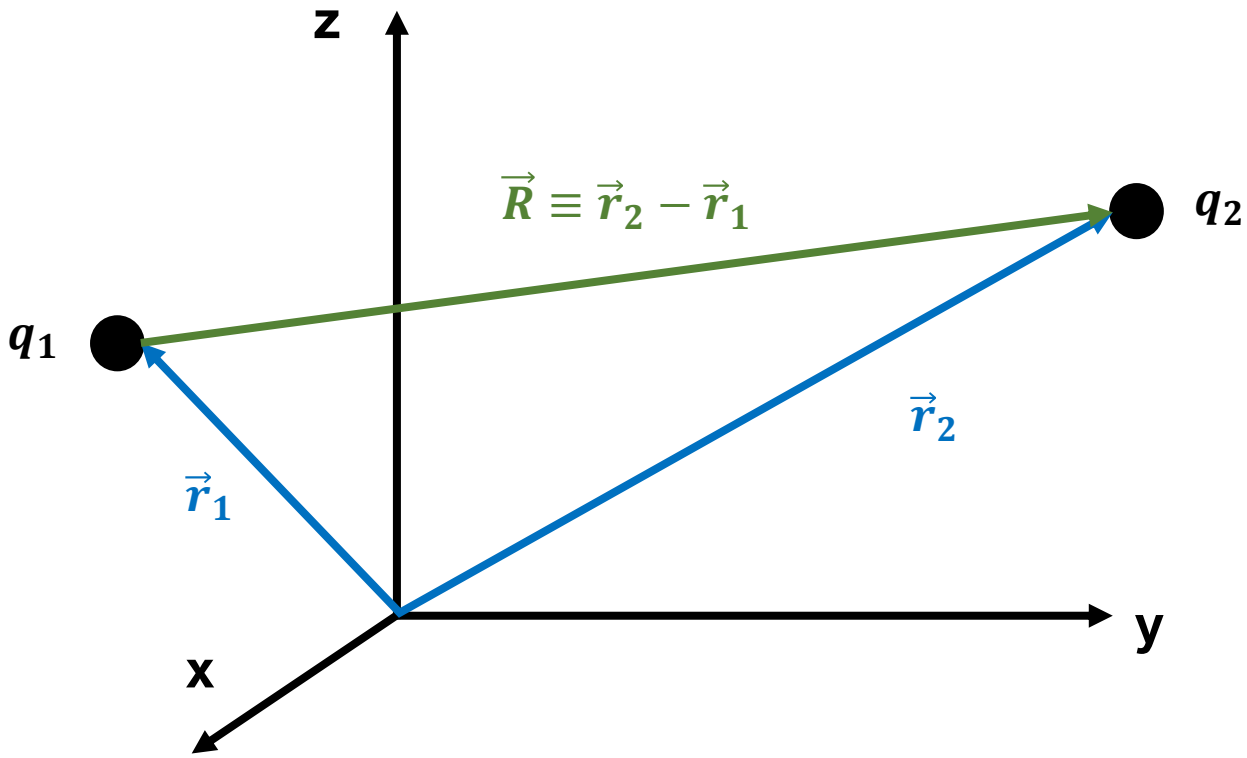
d) $\left(3\hat{\imath} + 7\hat{k}\right) \times \left(-4\hat{\jmath} - 5\hat{k}\right)$

e) $\left(\hat{\jmath} - 8\hat{\imath}\right) \times \left(5\hat{\imath} + \hat{k}\right)$

f) $\left(3\hat{\jmath} - 5\hat{k}\right) \times \left(-4\hat{k} + \hat{\jmath}\right)$

Lei de Coulomb Vetorial

A Lei de Coulomb Vetorial



$$\vec{F}_2 = \frac{kq_1q_2}{R^2}\hat{R}$$

A expressão ao lado é a verdadeira Lei de Coulomb, que dá a força (que é um vetor) que, neste caso, atua sobre a partícula de carga q_2, causada pela partícula de carga q_1. Sendo que

$$R = |\vec{R}| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| \qquad \hat{R} = \vec{R}/R$$

Exemplo

Considere duas partículas de cargas $q_1 = +4{,}0 \cdot 10^{-5} C$ e $q_2 = -5{,}0 \cdot 10^{-4} C$ localizadas, respectivamente, nas posições:

$$\vec{r}_1 = (6\hat{\imath} - 7\hat{\jmath})m$$

$$\vec{r}_2 = (3\hat{\imath} - 11\hat{\jmath})m$$

Calcule o que se pede, lembrando que a força é um vetor, mas o módulo da força é escalar. Ambas são medidas em newtons (N).

a. A força $\vec{F}_2$, que atua sobre q_2, causada por q_1.

b. A força $\vec{F}_2$, que atua sobre q_2, causada por q_1.

c. O módulo dessas forças.

d. Esboce o resultado

e. Relacione esses resultados com a 3ª lei de Newton.