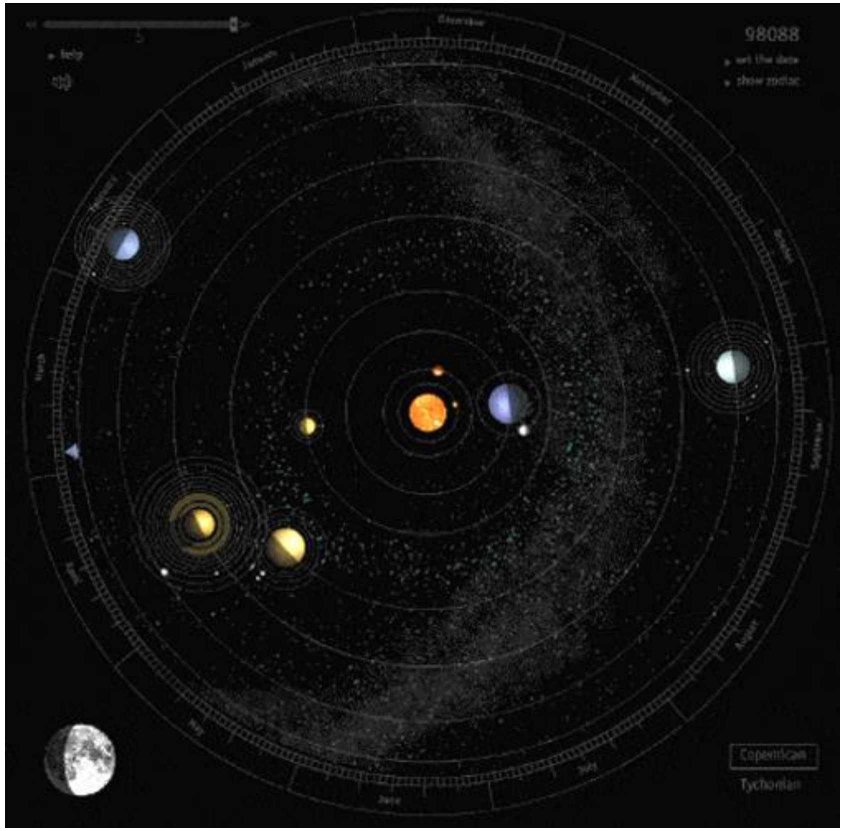
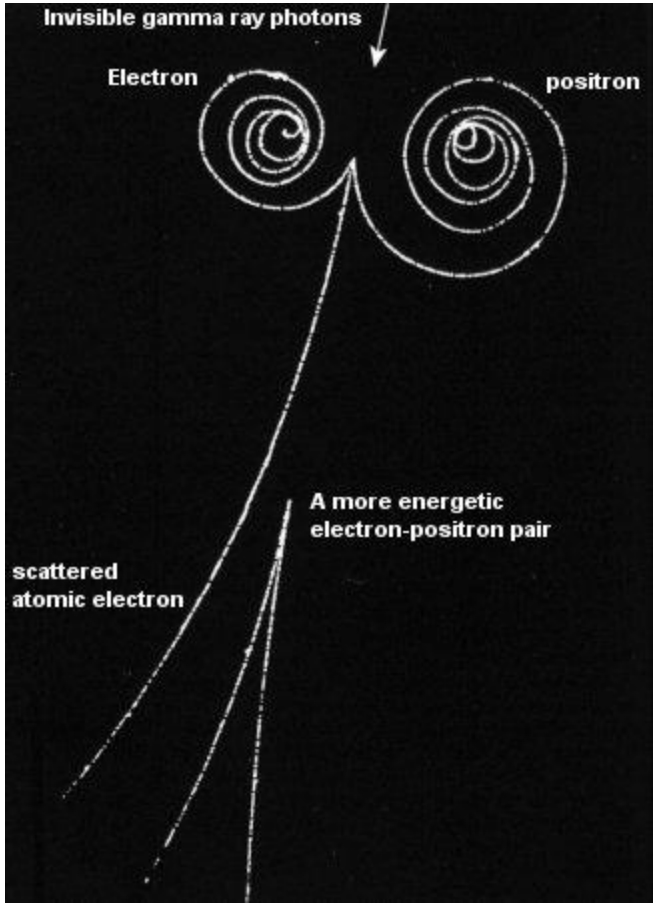
Física Básica I

4 – Movimento em Duas e Três Dimensões

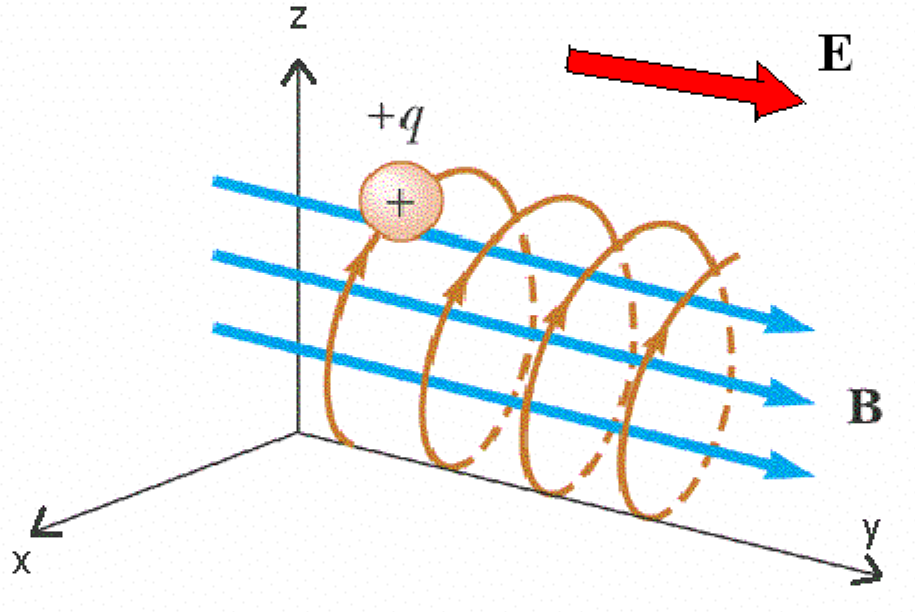
4.1. Exemplos de Movimentos em Duas e Três Dimensões



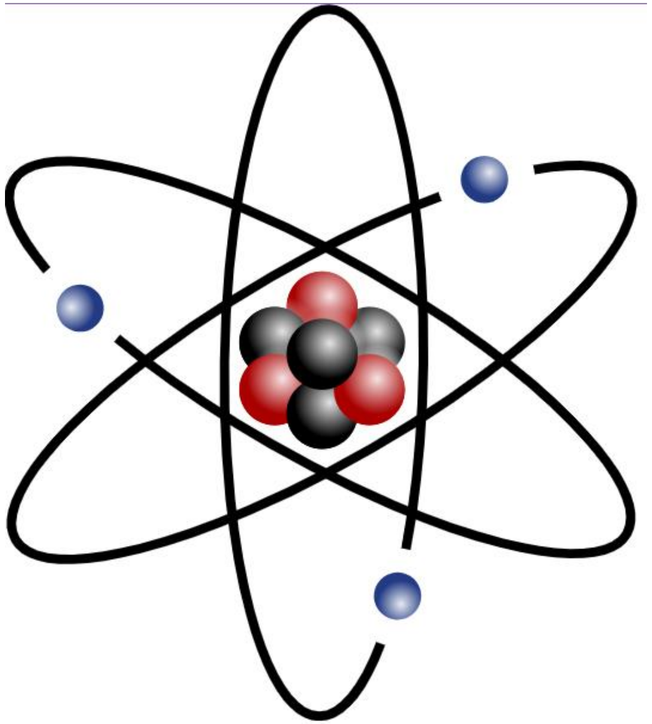
4.1. Exemplos de Movimentos em Duas e Três Dimensões



Movimento espiral



Movimento helicoidal




4.2. Independência dos Movimentos e Representação Vetorial da Posição $\vec{r}(t)$ em duas dimensões

- Galileu percebeu que um movimento em duas dimensões (vertical e horizontal, por exemplo) pode ser entendido como a composição dos movimentos em cada direção.

- Por exemplo, o lançamento de um projétil pode ser decomposto no movimento de subir e descer (vertical) e no movimento horizontal para uma certa direção.

- O vídeo abaixo ilustra a ideia:

https://youtube.com/shorts/me4g2O9aTV4?si=FL0J9ZxC9-90ne4E

4.2. Independência dos Movimentos e Representação Vetorial da Posição $\vec{r}(t)$ em duas dimensões

- Com isso, representamos as grandezas assim:

- Cada direção (x, y ou z) é independente das demais.

- Então podemos representar a posição como um vetor e o podemos tratar cada componente do vetor como a posição da partícula em relação ao eixo respectivo.

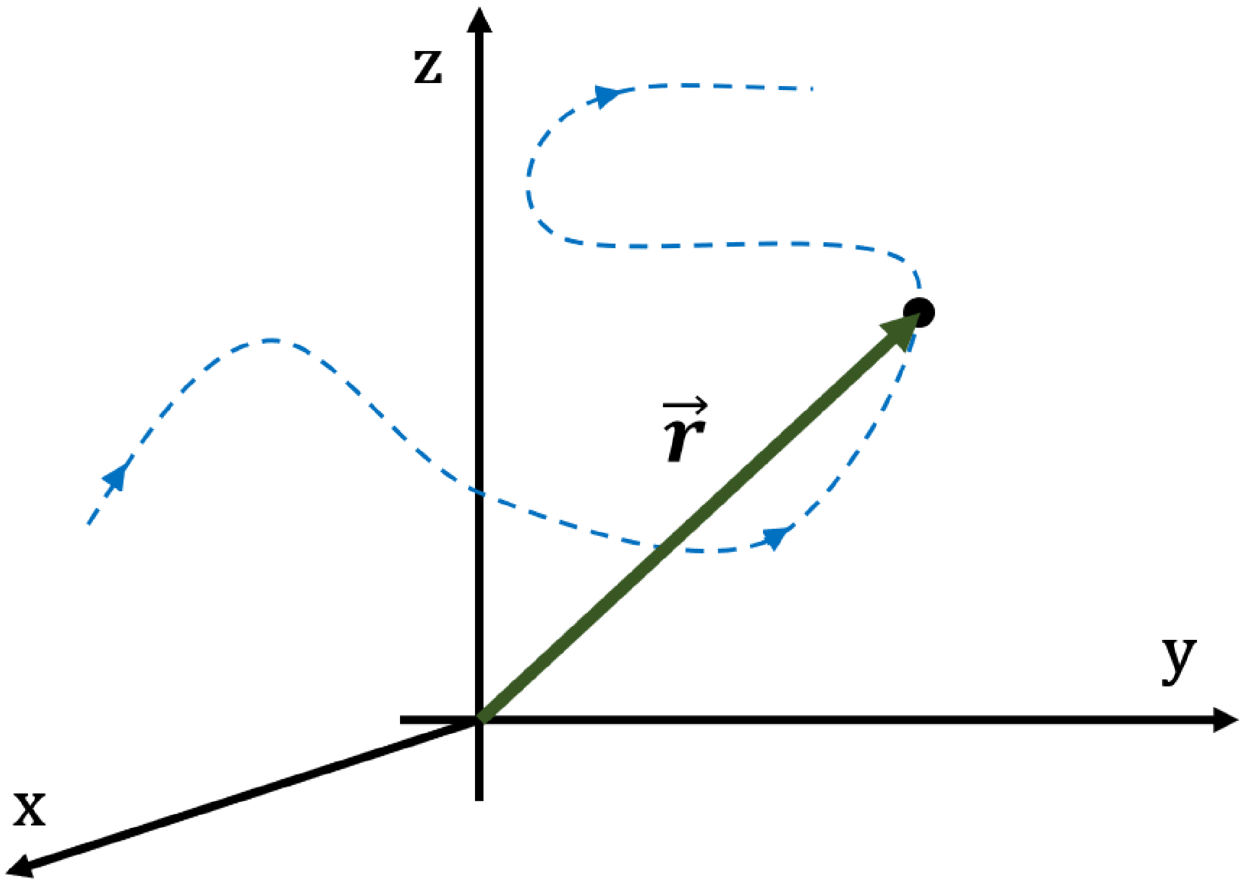
A posição $\vec{r}(t)$

- A posição de uma partícula no espaço é representada por um vetor, geralmente $\vec{r}$.

- A trajetória do movimento da partícula no espaço forma uma curva.

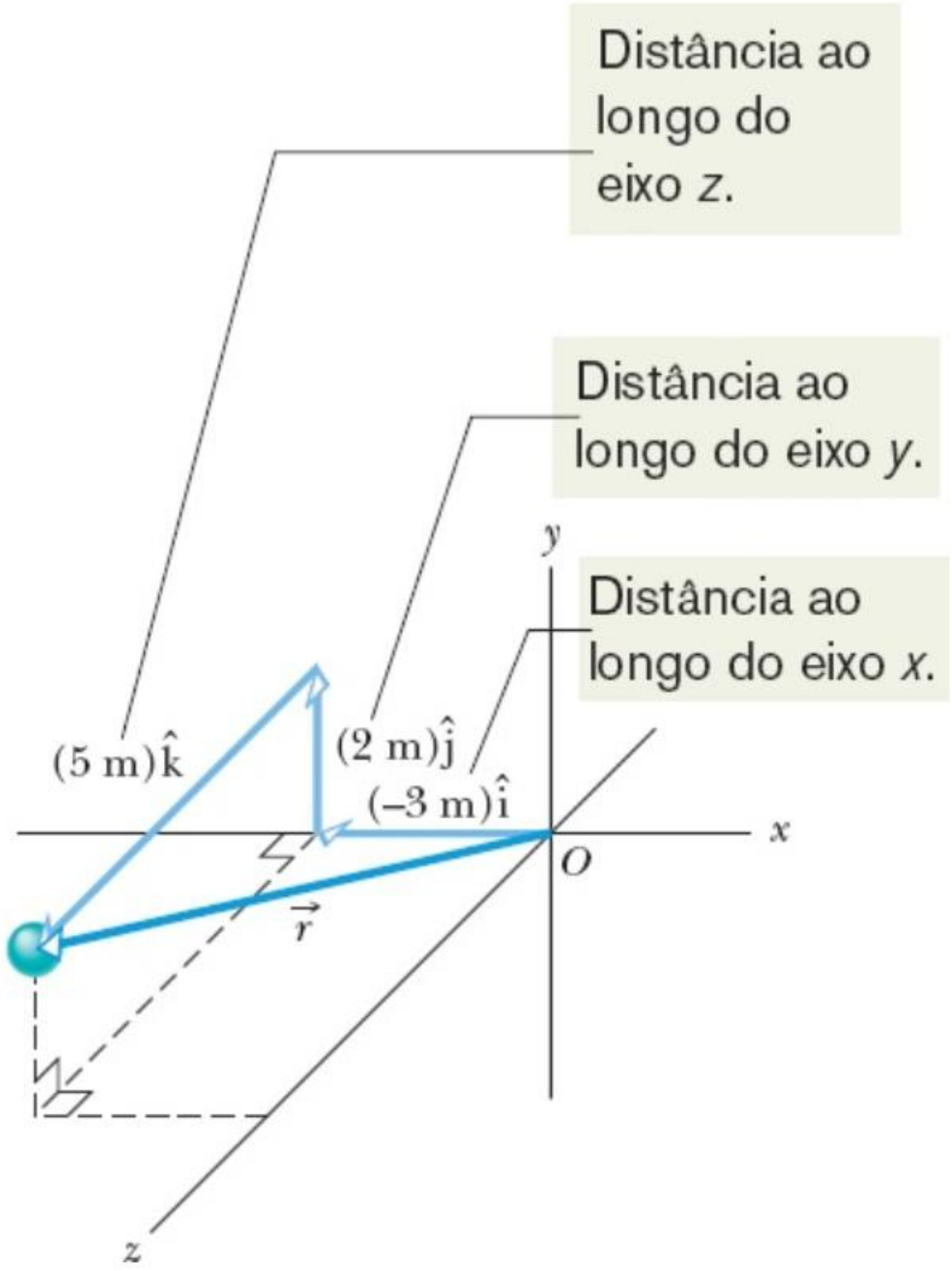
- Em 3D:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}$$



Prof. Isaac Torres, UFPA, Faculdade de Física, 2023

A posição de uma partícula no espaço



Exemplo 1

- Considere o movimento em duas dimensões da partícula abaixo:

$$x(t) = 4t^2 - 5t + 10$$
$$y(t) = -3t^4 - 5t^2$$

a) Escreva a função posição da partícula $\vec{r}(t)$.

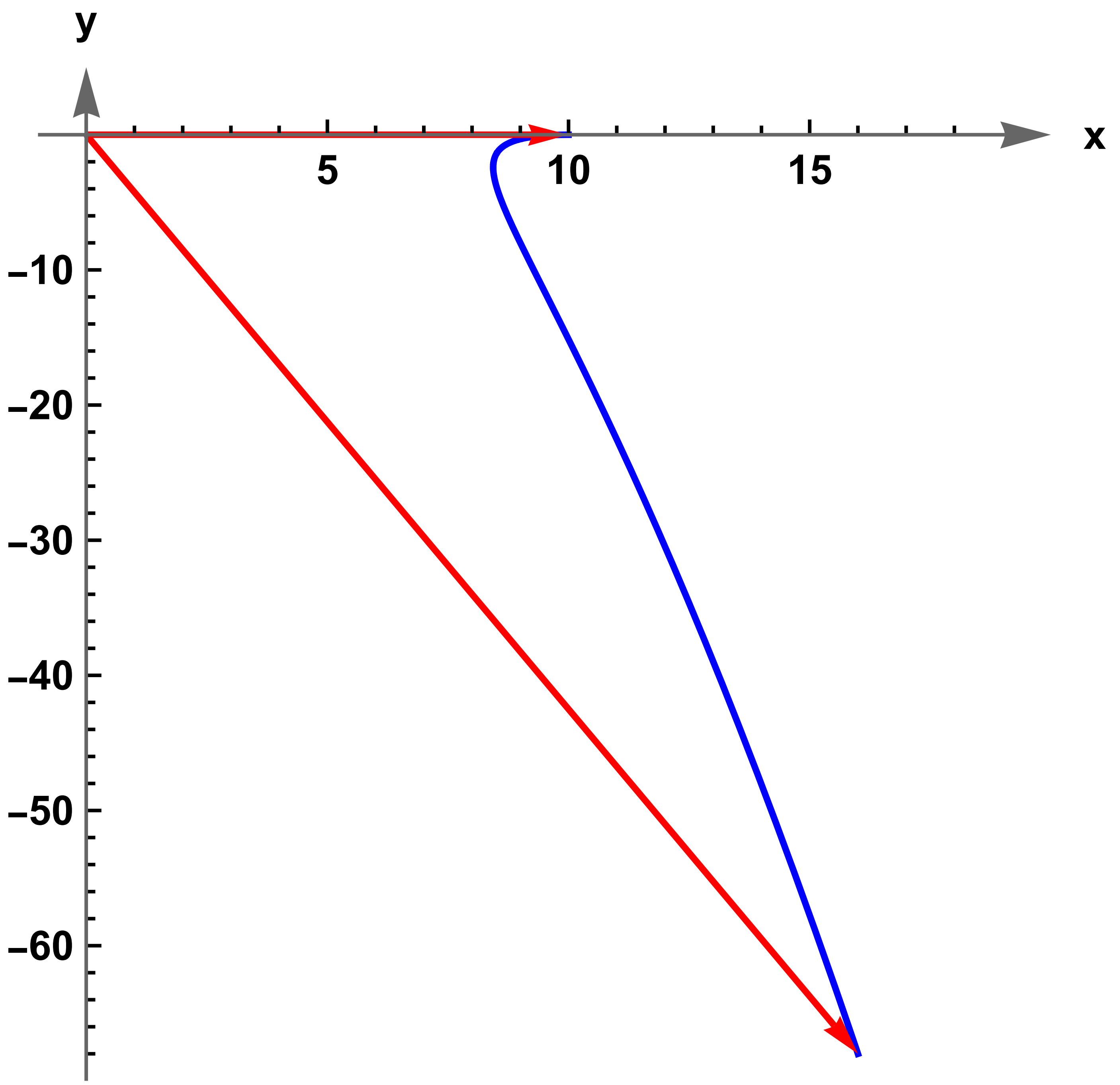
b) Calcule a posição inicial $\vec{r}_0$, ou seja, $\vec{r}(0s)$.

c) Calcule a posição no instante $t = 2s$, ou seja, $\vec{r}(2s)$.

d) Esboce a trajetória dessa partícula no plano entre os instantes t=0s e t=2s.

Prof. Isaac Torres, UFPA, Faculdade de Física, 2023

Gráfico do Exemplo Anterior



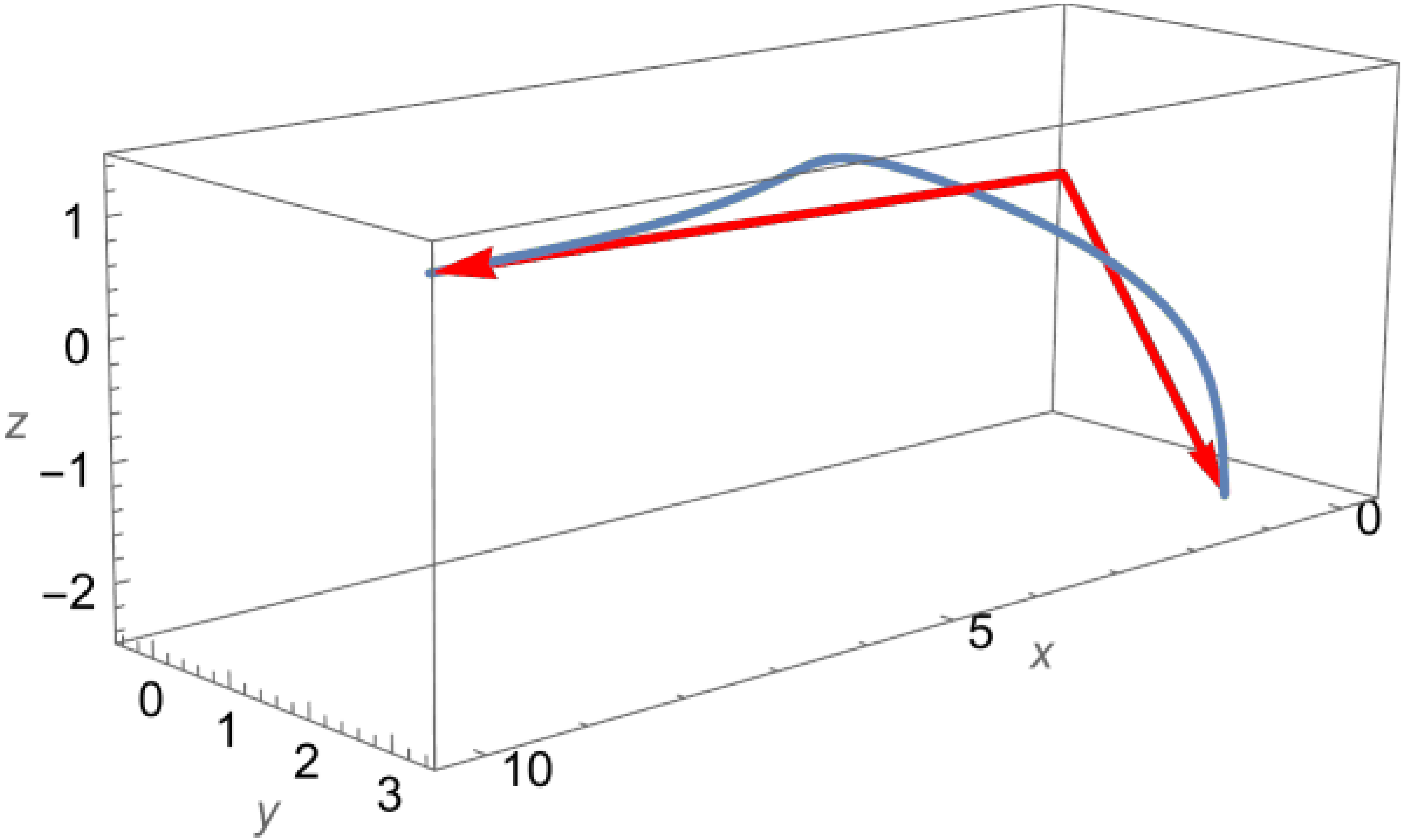
Exemplo 2

- Considere o movimento da partícula abaixo, em três dimensões:

$$\vec{r}(t) = \cosh t\, \hat{\imath} + 3\cos^2 t\, \hat{\jmath} + \ln t\, \hat{k}$$

a) Identifique as posições $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ desse movimento.
b) Determine as posições vetoriais da partícula nos t=0,1s e t=3s.
c) Esboce a trajetória da partícula nesse intervalo de tempo.

Gráfico do Exemplo Anterior



4.3. Deslocamento $\Delta\vec{r}$ em três dimensões

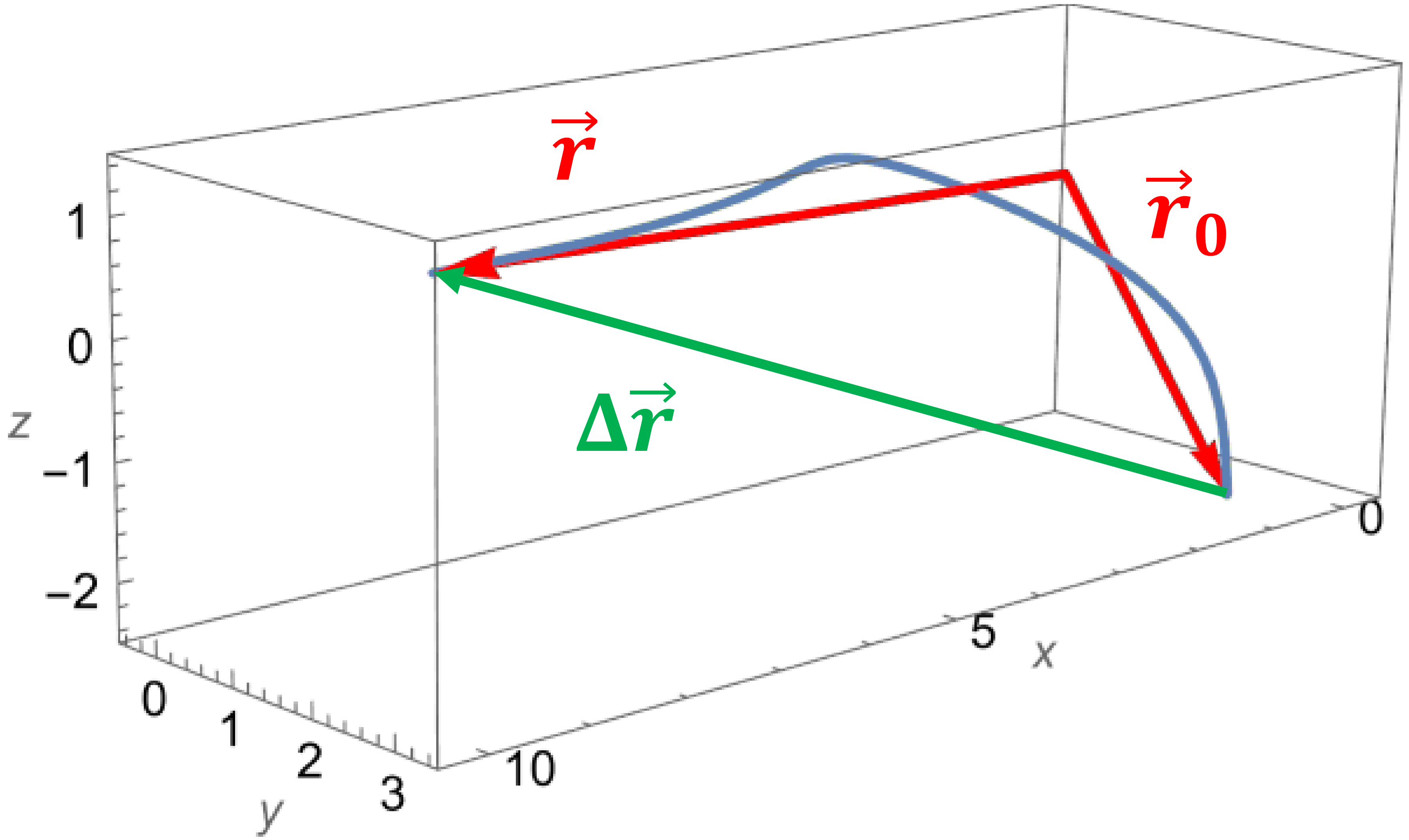
- O deslocamento é a diferença entre duas posições $\vec{r} = \vec{r}(t)$ e $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$ no espaço, representado por $\Delta\vec{r}$:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)$$

- Isso significa que o deslocamento é o vetor cujas componentes são os deslocamentos de cada coordenada:

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\,\hat{\imath} + \Delta y\,\hat{\jmath} + \Delta z\,\hat{k}$$

- **Representação Geométrica:** O deslocamento é o vetor que sai da posição inicial para a posição final, o que corresponde à sua definição matemática como vetor diferença:



Exemplo 3

- Nos exemplos 1 e 2 anteriores, calcule o deslocamento nos trechos considerados.

4.4. Velocidade Média $\vec{\mathrm{v}}_m$ e Instantânea $\vec{\mathrm{v}}(t)$ em três dimensões

- Se uma partícula se encontra inicialmente em uma posição $\vec{r}_0$ num instante t_0 e se desloca para uma posição $\vec{r}$ no instante t, o deslocamento foi $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$ num intervalo de tempo $\Delta t = t - t_0$.

- A velocidade média (que é vetorial) $\vec{\mathrm{v}}_m$ mede quanto de deslocamento ocorreu por unidade de tempo, através da seguinte definição:

$$\vec{\mathrm{v}}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{t - t_0}$$

Exemplo 4

- Para os exemplos 1 e 2, calcule a velocidade média nos trechos considerados.

A Velocidade Instantânea

- Do mesmo modo como fizemos para o movimento em uma dimensão, quando o intervalo de tempo tende a zero, a velocidade média se aproxima da velocidade instantânea, que pode, portanto, ser definida como:

$$\vec{\mathrm{v}}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{\mathrm{v}}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \,.$$

- Esta derivada é representada como $d\vec{r}/dt$ ou como $\dot{\vec{r}}$:

$$\vec{\mathrm{v}}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

Componentes da Velocidade

- As componentes do vetor velocidade são as derivadas das funções componentes x, y e z:

$$\vec{\mathrm{v}} = \mathrm{v}_x\hat{\imath} + \mathrm{v}_y\hat{\jmath} + \mathrm{v}_z\hat{k}$$

- sendo $\mathrm{v}_x = \frac{dx}{dt}$, $\mathrm{v}_y = \frac{dy}{dt}$ e $\mathrm{v}_x = \frac{dz}{dt}$, de forma que

$$\vec{\mathrm{v}} = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k} \ ,$$

- ou seja, basta derivar cada coordenada separadamente.

Exemplo 5

- Considere as 4 funções posição abaixo. Determine suas funções velocidade e suas velocidades iniciais e as velocidades no instante $t = 10s$.

a) $\vec{r}_1(t) = 2t^3\,\hat{\imath} - 3\sqrt{t}\,\hat{\jmath}$

b) $\vec{r}_2(t) = -\frac{1}{\sqrt{t}}\,\hat{\jmath} - t^{2/3}\,\hat{k}$

c) $\vec{r}_3(t) = [2 + \cos(4t - 3)]\,\hat{\imath} + [-3 + \mathrm{sen}(4t - 3)]\,\hat{\jmath}$ (mov. circular)

d) $\vec{r}_4(t) = 5t \cdot \cos\left(\frac{t}{2}\right)\hat{\imath} + 5t \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\hat{\jmath}$ (espiral circular)

Propriedade Importante

- A velocidade de uma partícula, quando não se anula, é sempre tangente à trajetória do movimento.

- Na simulação abaixo, na opção “vectors,” é possível visualizar como essa propriedade se manifesta, utilizando como exemplo o lançamento de um projétil, considerado um movimento em duas dimensões:

Projectile Motion (colorado.edu)

4.5. Aceleração Média $\vec{a}_m$ e Instantânea $\vec{a}(t)$ em três dimensões

- Se uma partícula se encontra inicialmente com uma velocidade $\vec{\mathrm{v}}_0$ num instante t_0 e depois, num instante t, passa para a velocidade $\vec{\mathrm{v}}$, a aceleração média (que é vetorial) $\vec{a}_m$ mede o quanto a velocidade se altera em relação ao tempo, em média, através da seguinte definição:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{\mathrm{v}}}{\Delta t} = \frac{\vec{\mathrm{v}} - \vec{\mathrm{v}}_0}{t - t_0}$$

Exemplo 4

- Para os exemplos 1 e 2, calcule a aceleração média nos trechos considerados.

A Aceleração Instantânea

- Do mesmo modo como fizemos para o movimento em uma dimensão, quando o intervalo de tempo tende a zero, a aceleração média se aproxima da aceleração instantânea, que pode, portanto, ser definida como:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\mathrm{v}}}{\Delta t} \,.$$

- Esta derivada é representada como $d\vec{\mathrm{v}}/dt$ ou como $\dot{\vec{\mathrm{v}}}$ ou, ainda, $\ddot{\vec{r}}$:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} = \dot{\vec{\mathrm{v}}} = \ddot{\vec{r}}$$

Exemplo 5

- Considere as 4 funções posição abaixo. Determine suas funções aceleração.

a) $\vec{r}_1(t) = 2t^3\,\hat{\imath} - 3\sqrt{t}\,\hat{\jmath}$

b) $\vec{r}_2(t) = -\frac{1}{\sqrt{t}}\,\hat{\jmath} - t^{2/3}\,\hat{k}$

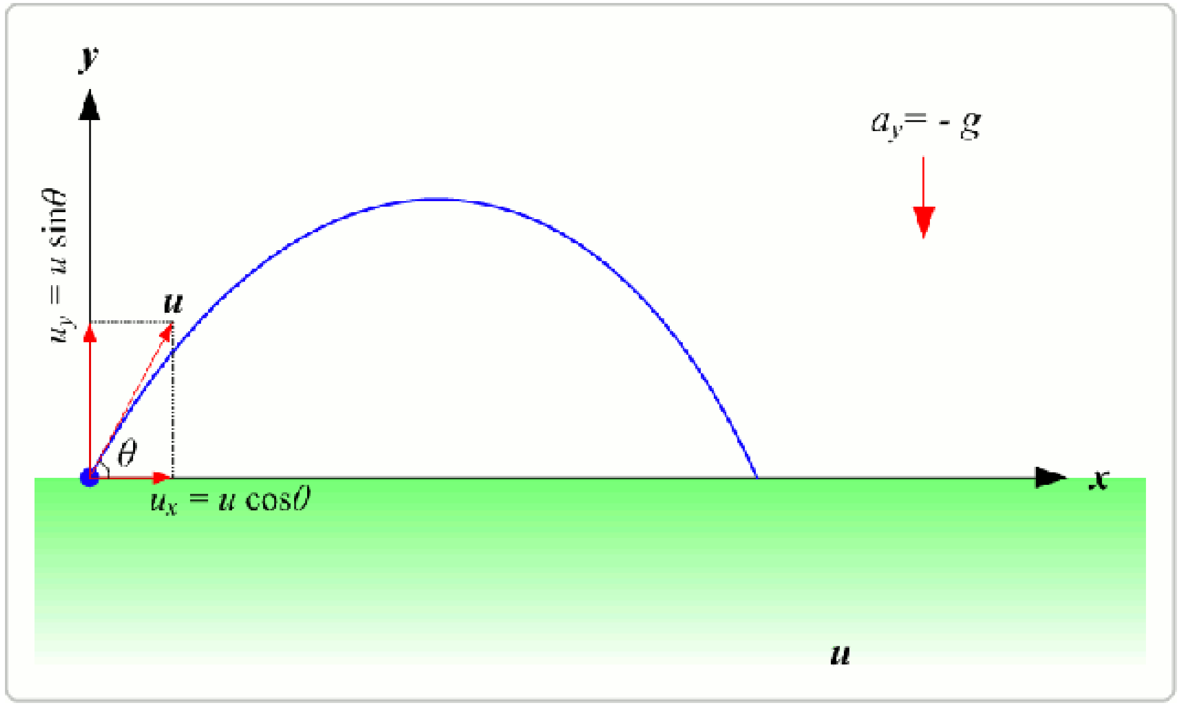
c) $\vec{r}_3(t) = [2 + \cos(4t - 3)]\,\hat{\imath} + [-3 + \text{sen}(4t - 3)]\,\hat{\jmath}$ (mov. circular)

d) $\vec{r}_4(t) = 5t\cos\left(\frac{t}{2}\right)\hat{\imath} + 5t\,\text{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\hat{\jmath}$ (espiral circular)

4.6. Aplicações I: Lançamentos Horizontal e Oblíquo, sem força de arrasto

- O lançamento (sem arrasto) é um movimento bidimensional e pode ser de dois tipos:

Lançamento Horizontal



Lançamento Oblíquo

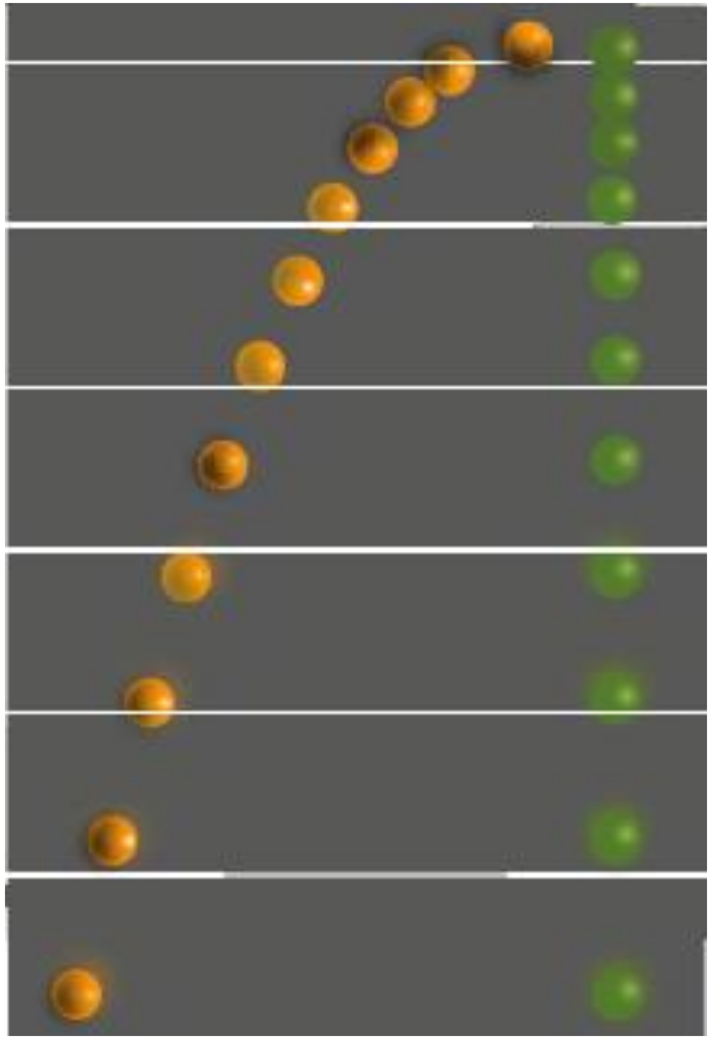
Lançamento Horizontal – Função Posição $\vec{r}(t)$

- Como descrever esse movimento?

❑ Inserimos um plano cartesiano, de modo que o eixo y descreva a queda

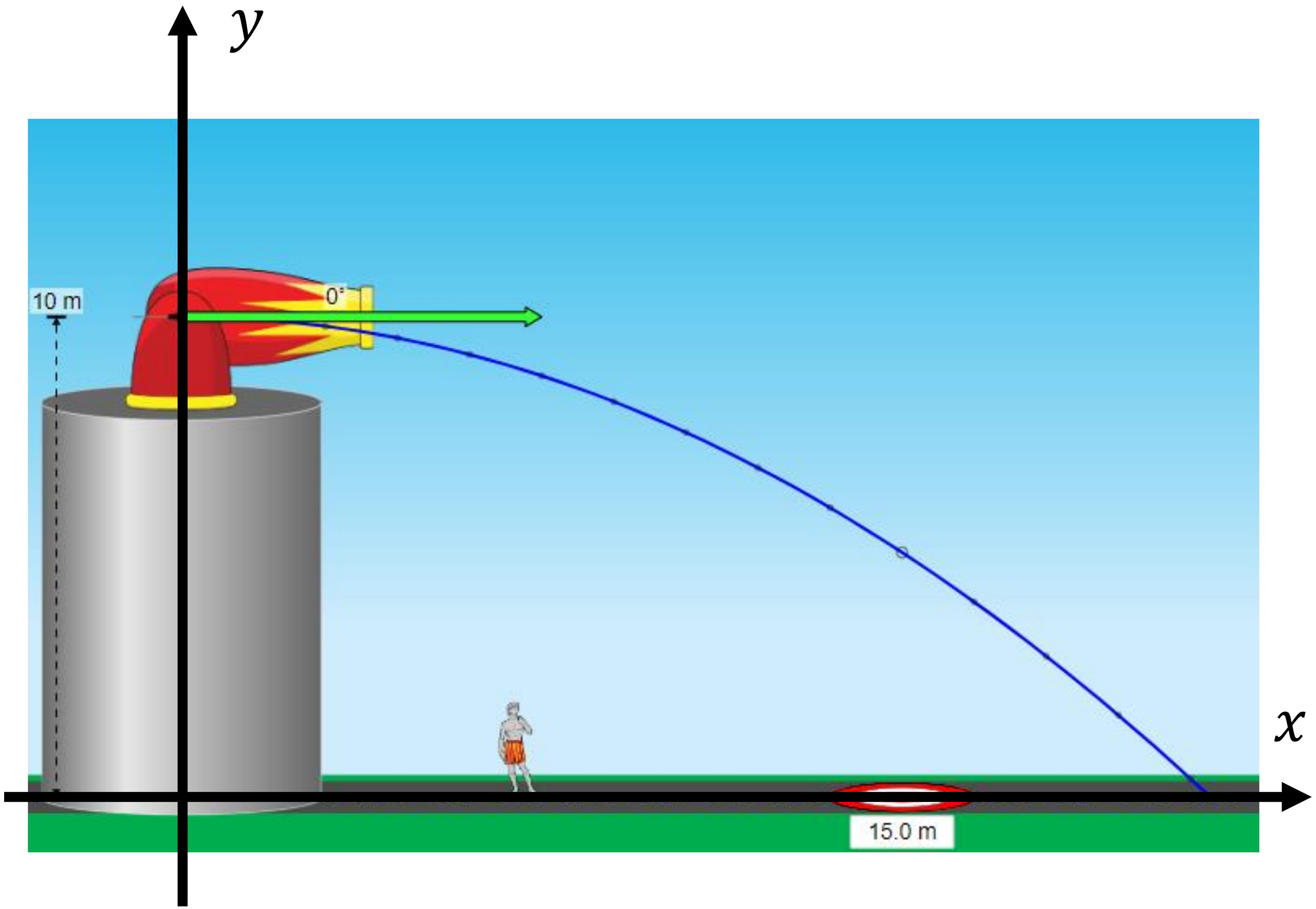
❑ E o eixo x descreve a "ida para a frente."

❑ Estes movimentos são independentes.



Lançamento Horizontal – Função Posição $\vec{r}(t)$

- No eixo x, é um movimento com velocidade constante (MRU).
- No eixo y, um movimento com aceleração constante (MRUV).
- Como o lançamento é horizontal, a velocidade inicial está no eixo x.



Lançamento Horizontal – Função Posição $\vec{r}(t)$

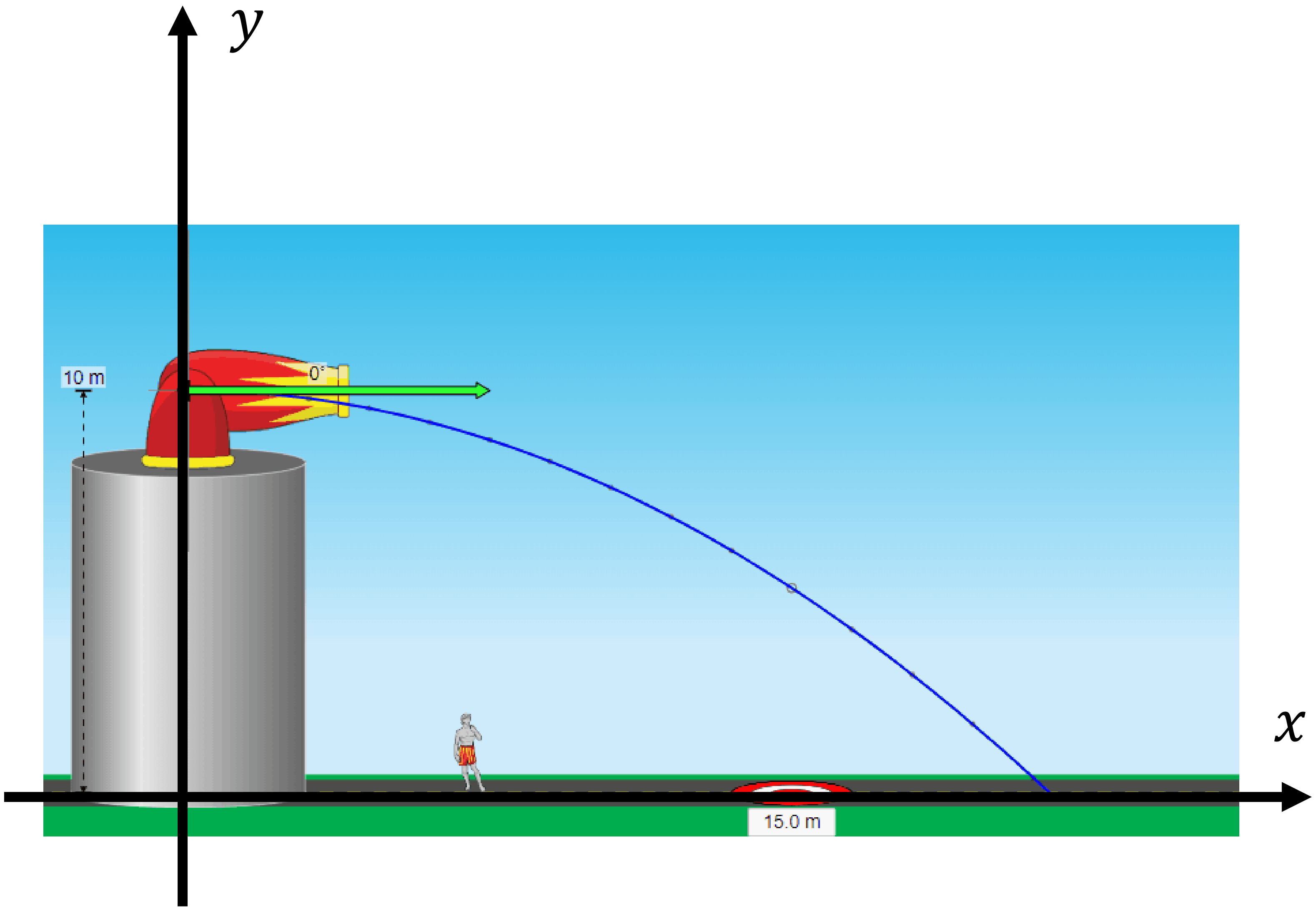
- O movimento é uma composição de um MRU no eixo x com um MRUV (queda livre) no eixo y.

- No eixo x:

$$x(t) = x_0 + \text{v}_x t$$

- Como $x_0 = 0$ e $\text{v}_x = \text{v}_0$:

$$\boxed{x(t) = \text{v}_0 t\ .}$$



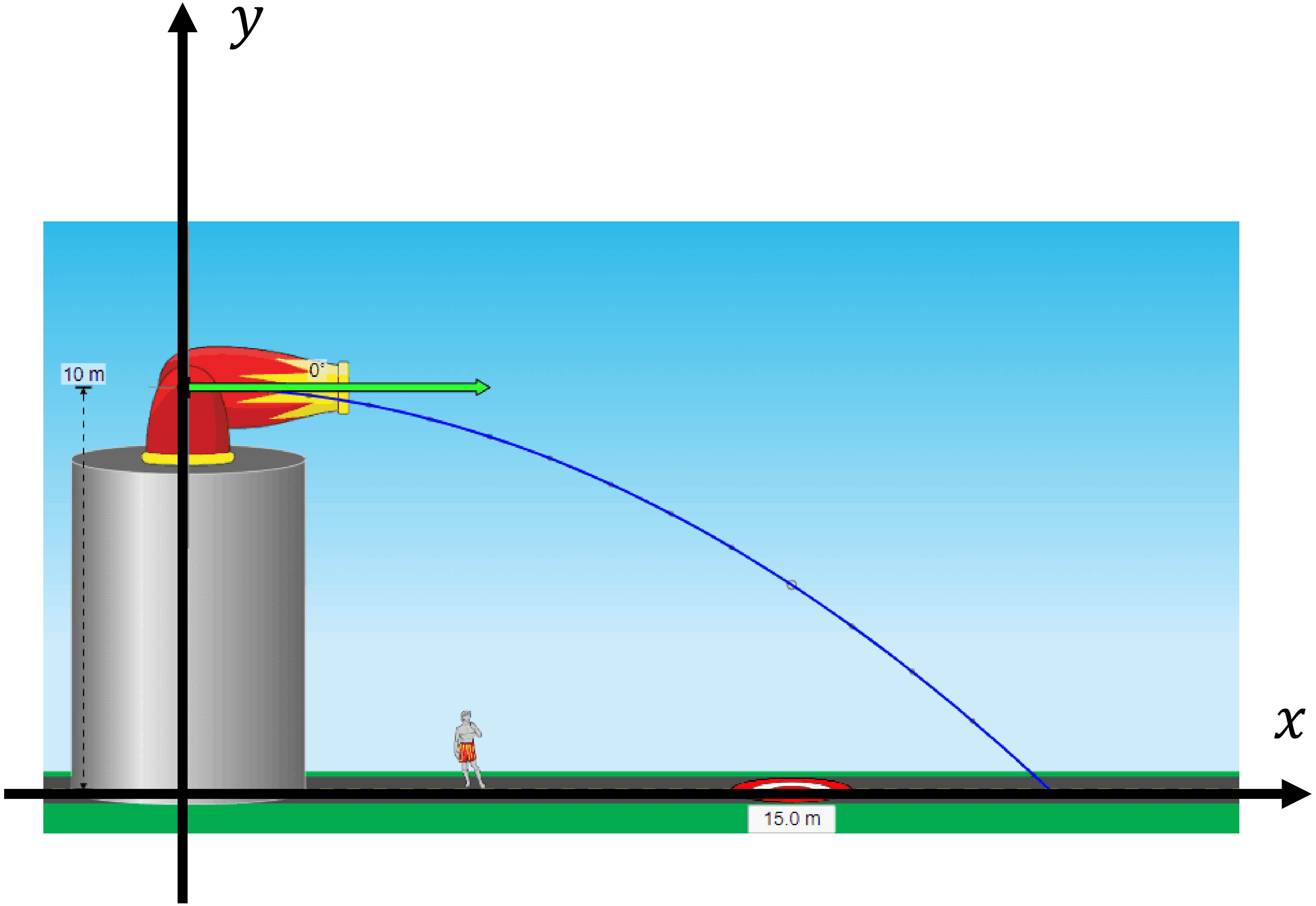
Lançamento Horizontal – Função Posição $\vec{r}(t)$

- No eixo y:

$$y(t) = y_0 + \mathrm{v}_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

- Como $y_0 = h$ (vamos chamar a altura de h) e $\mathrm{v}_{0y} = 0$ (não é empurrado para cima ou para baixo) e como $a_y = -g$,

$$\boxed{y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2\ .}$$



Lançamento Horizontal – Função Posição $\vec{r}(t)$

- Dessa forma, a posição $\vec{r}(t)$ é dada por:

$$\vec{r}(t) = \mathrm{v}_0 t\ \hat{\imath} + \left(h - \frac{1}{2} g t^2\right) \hat{\jmath}$$

- Daí, a velocidade é dada por (Exercício: derive $\vec{r}(t)$ para encontrar):

$$\vec{\mathrm{v}}(t) = \mathrm{v}_0\ \hat{\imath} - g t\ \hat{\jmath}$$

- E a aceleração é dada por (Exercício: derive $\vec{\mathrm{v}}(t)$ para encontrar):

$$\vec{a}(t) = -g\ \hat{\jmath}$$

Exercícios – Lançamento Horizontal

1. Mostre que o alcance de um lançamento horizontal (a distância horizontal percorrida) vale:

$$x_m = \mathrm{v}_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

2. Mostre que o módulo da velocidade, ou seja, a velocidade escalar do movimento, vale:

$$\mathrm{v(t)} = \sqrt{\mathrm{v}_0^2 + (gt)^2}$$

Significado de Oblíquo

Definições de Oxford Languages · Saiba mais

oblíquo

adjetivo

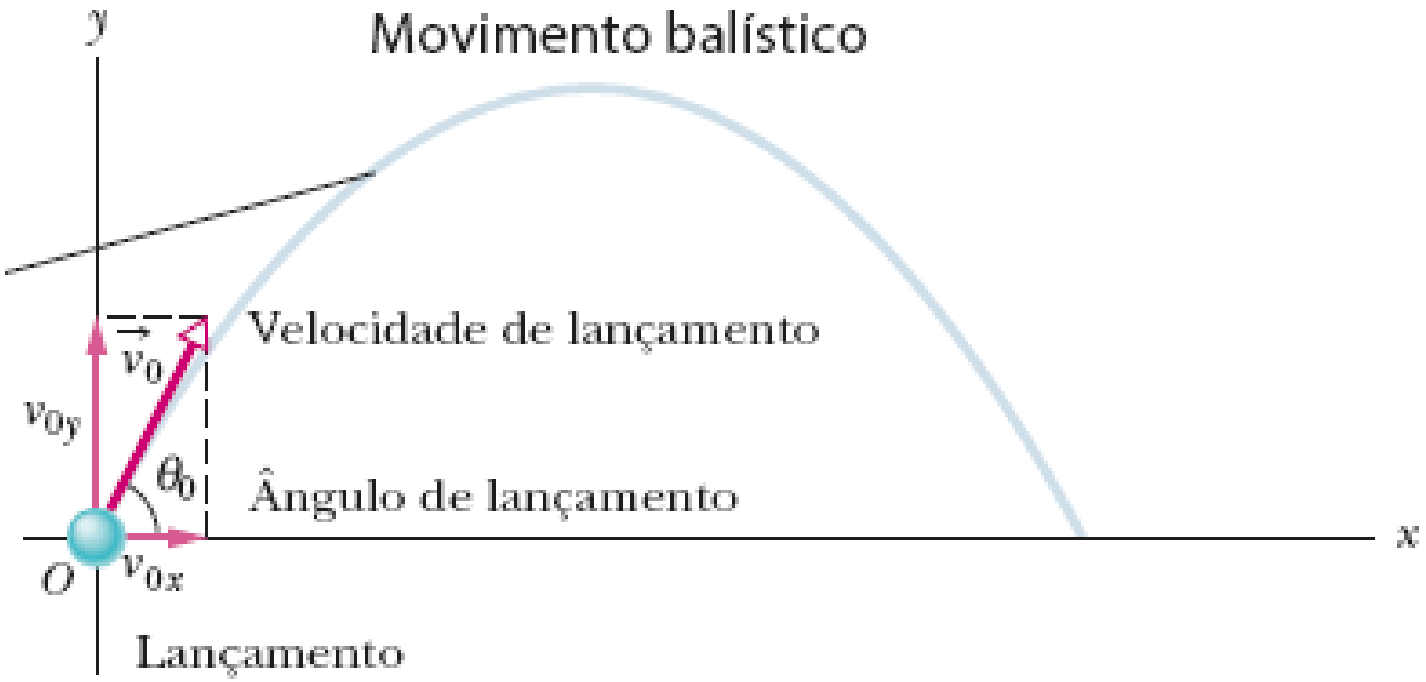
1. que se desvia tanto do paralelismo quanto da perpendicularidade; inclinado.
2. que não é direito ou reto; torto, tortuoso, vesgo.

Semelhantes

atravessado | diagonal | enviesado | esguelhado | esquinado | inclinado

Independência dos movimentos x e y

- A aceleração da gravidade aponta para baixo, então ela não afeta o movimento no eixo x. L
- Logo o corpo permanece com a velocidade constante nesse eixo, sendo representada por v_{0x}, que é a componente x da velocidade inicial $\vec{v}_0$:



$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\theta_0 \\ v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\theta_0 \end{cases}$$

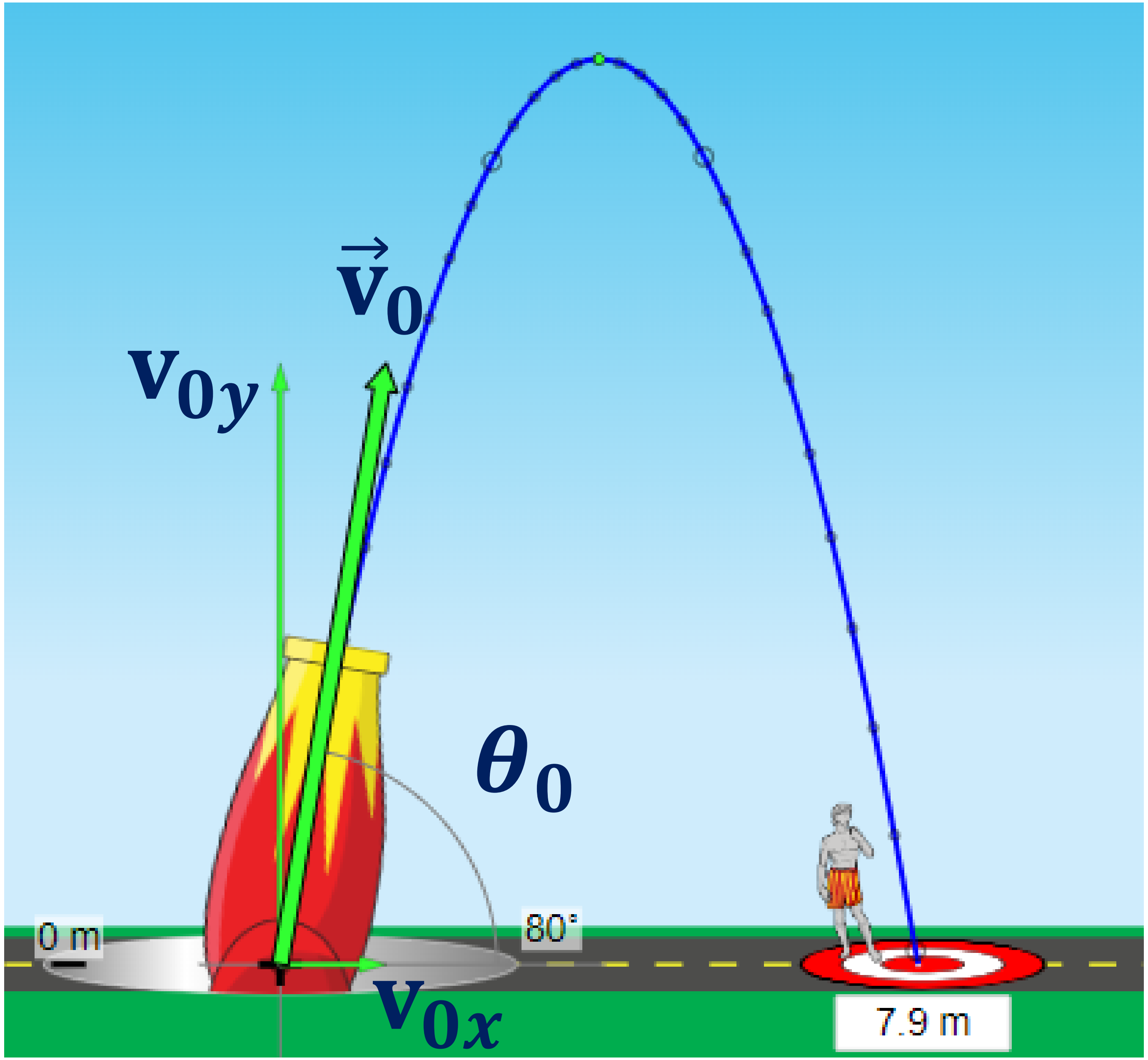
Lançamento Oblíquo

- Note que a composição dos movimentos é a mesma!
- MRU na horizontal (eixo x) e MRUV na vertical (eixo y).
- O que mudam são as condições iniciais.
- Agora, as condições iniciais são:

$$\vec{r}_0 = \vec{0}$$
$$\vec{v}_0 = v_{0x}\,\hat{\imath} + v_{0y}\,\hat{\jmath}$$

- Ou seja:

$$\vec{v}_0 = (v_0 \cos\theta_0)\,\hat{\imath} + (v_0 \operatorname{sen}\theta_0)\,\hat{\jmath}$$

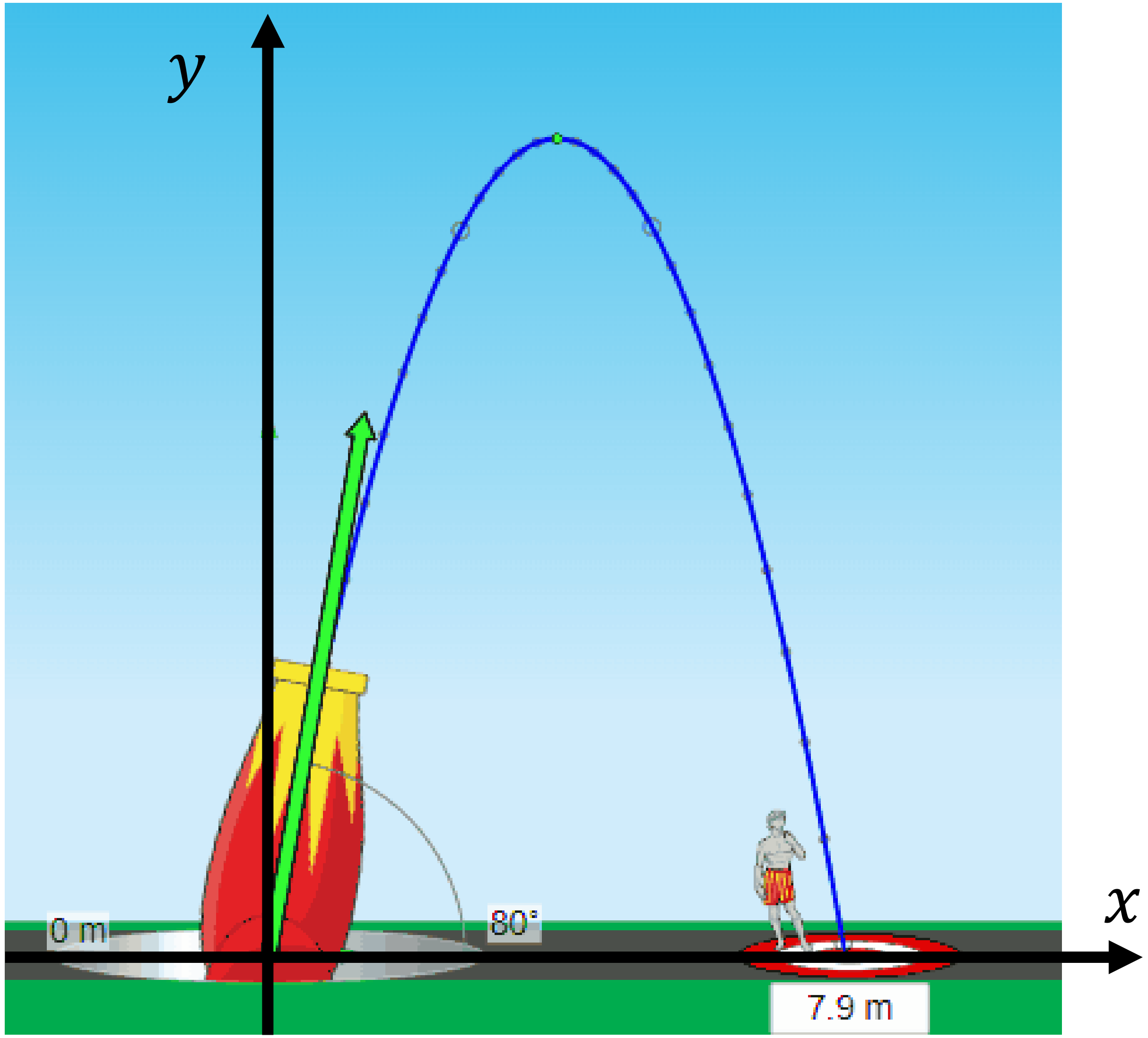


Vetor Velocidade no Lançamento Oblíquo

- Note a variação da componente y e que a componente x é constante.

- Para manipular esta simulação, acesse:

https://phet.colorado.edu/sims/html/projectile-motion/latest/projectile-motion_all.html



Movimento no eixo x

- O deslocamento do projétil no eixo x é um MRU, com a velocidade constante, que deve, portanto, ser igual à inicial, que é v_{0x}.

- Se o projétil sai da origem, então a expressão $x(t) = \mathrm{v}_{0x} t$ se torna:

$$x(t) = (\mathrm{v}_0 \cos\theta_0)\, t \ .$$

Movimento no eixo y

- O deslocamento do projétil no eixo y é um MRUV, com a aceleração constante, que deve, portanto, ser igual à aceleração da gravidade (em módulo), mas apontando para baixo. Logo, $a = -g$.

- A velocidade inicial no eixo y é v_{0y}, que vale $\mathrm{v}_{0y} = \mathrm{v}_0 \operatorname{sen} \theta_0$.

- Dessa forma, a expressão da componente $y(t)$ é:

$$y(t) = (\mathrm{v}_0 \operatorname{sen} \theta_0)t - \frac{1}{2} g t^2 \; .$$

Lançamento Oblíquo – Função Posição $\vec{r}(t)$

- Posição no Lançamento Oblíquo:

$$\vec{r}(t) = \mathrm{v}_{0x}t\,\hat{\imath} + \left(\mathrm{v}_{0y}t + \frac{1}{2}at^2\right)\hat{\jmath}$$

- Isso porque:

$$\begin{cases} x(t) = \mathrm{v}_{0x}t & \longrightarrow \boxed{\text{MRU na horizontal}} \\ y(t) = \mathrm{v}_{0y}t + \dfrac{1}{2}gt^2 & \longrightarrow \boxed{\text{MRUV na vertical}} \end{cases}$$

Lançamento Oblíquo – Função Posição $\vec{r}(t)$

- Posição no Lançamento Oblíquo:

$$\boxed{\vec{r}(t) = (\mathrm{v}_0 \cos\theta_0)\, t\, \hat{\imath} + \left[(\mathrm{v}_0 \operatorname{sen}\theta_0)\, t - \frac{1}{2} g t^2\right] \hat{\jmath}}$$

Exercício 1: A trajetória é uma parábola

- A trajetória é uma curva no plano Oxy, cuja equação é obtida como a imagem da função $y \circ x^{-1}$. Ou seja, precisamos inverter $x(t)$ para obter $t(x)$ e substituir em y.

- Exercício 1: faça essa substituição e mostre que:

$$\boxed{y(x) = \operatorname{tg}\theta_0\ x - \frac{g}{2\mathrm{v}_0^2 \cos^2\theta_0} x^2}$$

- Sendo θ_0, g e v_0 constantes, conclua que a equação representa uma parábola.

Exercícios

2. Use $y(t)$ para descobrir quanto tempo a partícula num lançamento oblíquo leva para atingir a altura máxima e qual é essa altura máxima.

   R: $\mathrm{t}_1 = \mathrm{v}_0 \mathrm{sen}\, \theta_0 / g$; $y_1 = \mathrm{v}_0^2 \mathrm{sen}^2\, \theta_0 / 2g$

3. Note que o alcance máximo é obtido quando a partícula passa pela mesma altura de saída. Use esse fato para descobrir:

   a) Quanto tempo a partícula leva para atingir o alcance máximo.

      R: $t_2 = 2\mathrm{v}_0 \mathrm{sen}\, \theta_0 / g$

   a) Qual é o valor desse alcance máximo (esse alcance é dado por x(t) ou por y(t)?)

      R: $x_2 = \mathrm{v}_0^2 \cos(2\theta_0)/g$

Animações

- Para o Lançamento Horizontal:
- https://www.geogebra.org/m/crqxsswe

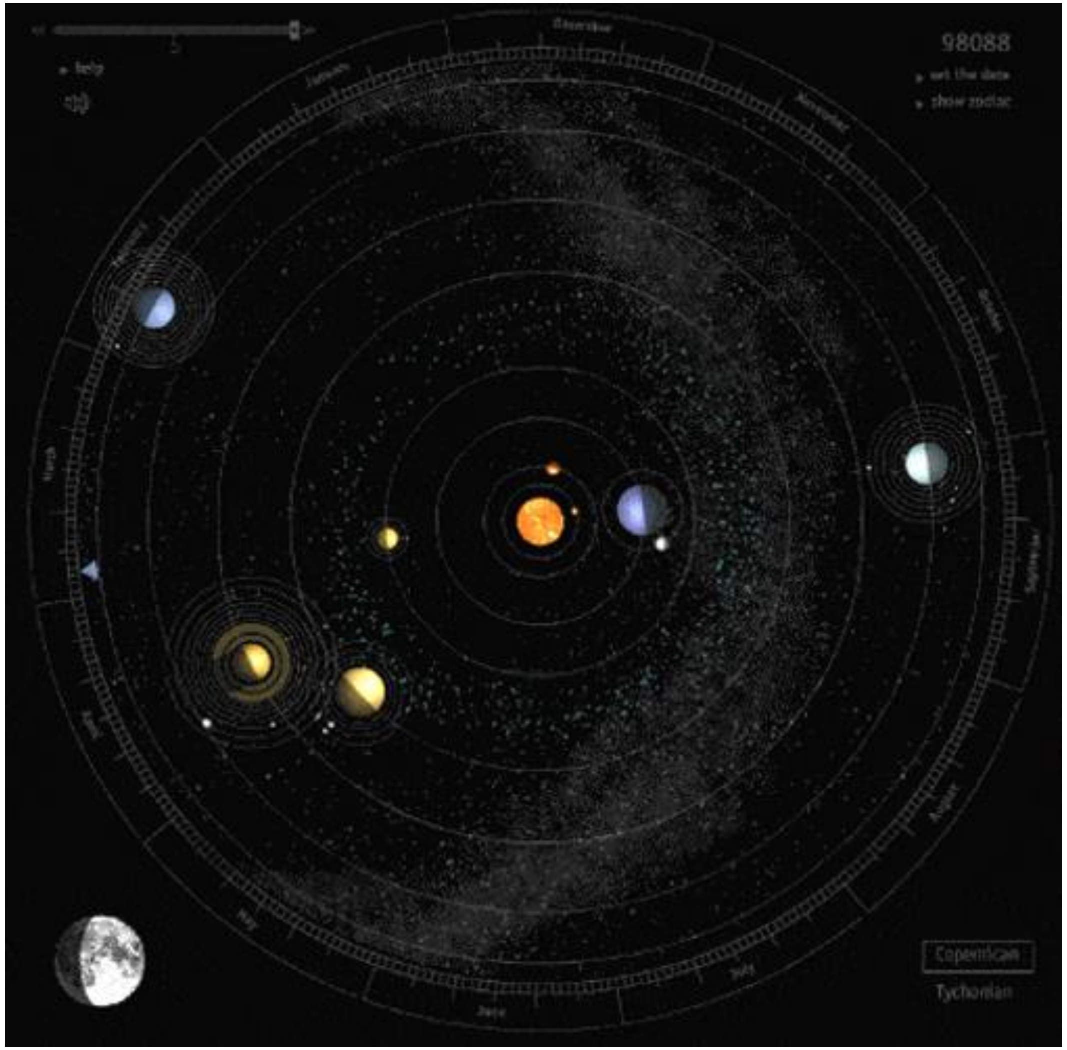
- Para o lançamento Oblíquo:
- https://www.geogebra.org/m/jdch5mc4

- As animações acima permitem calcular valores de x e y com facilidade para os lançamentos que estudamos.

4.7. Aplicações II:
Movimento Circular Uniforme (M.C.U.)

- É qualquer movimento de rotação de uma partícula em que a velocidade escalar é constante.

- Numa primeira aproximação, as órbitas dos planetas no Sistema Solar são M.C.U.'s

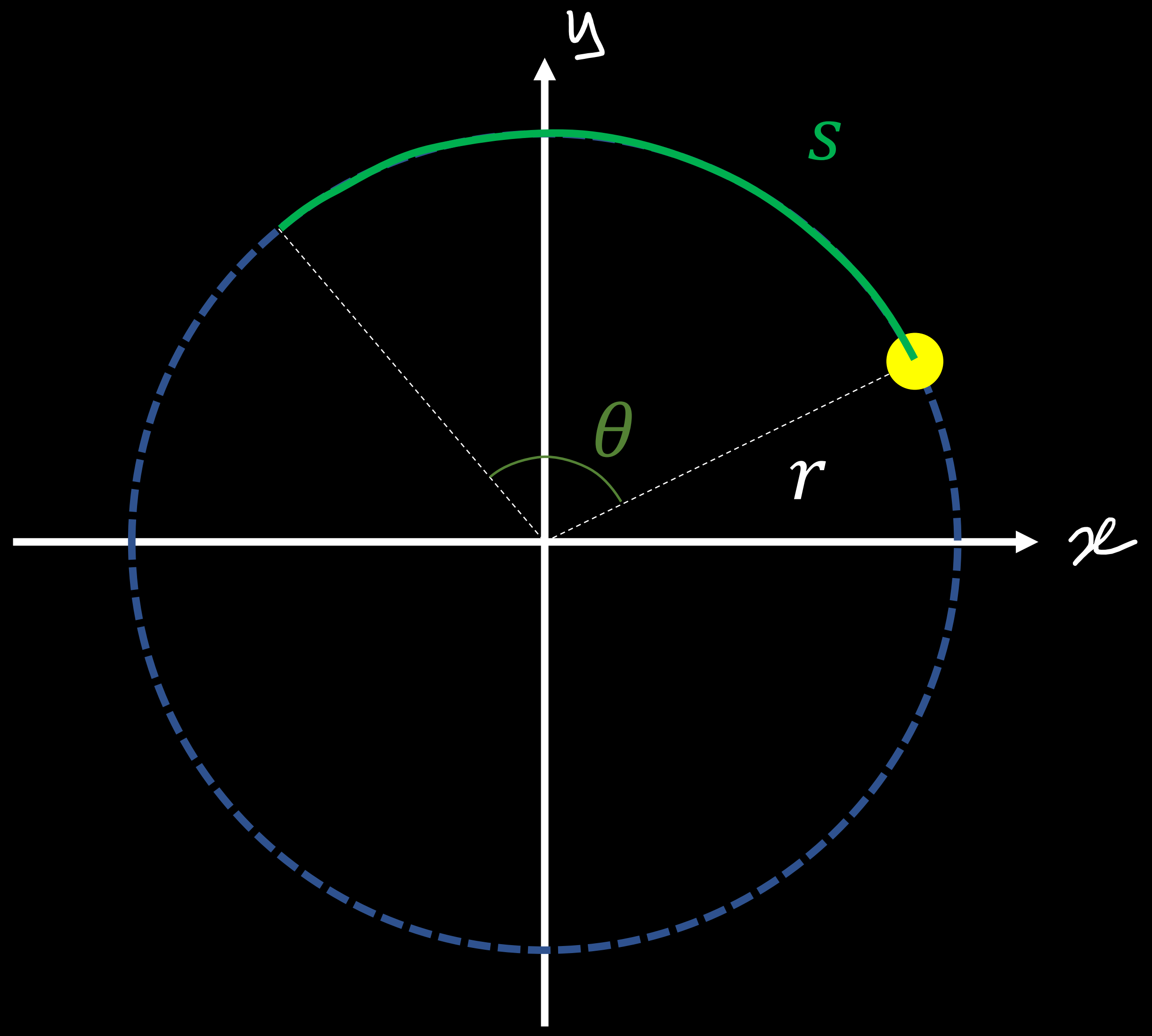


Ângulo e espaço percorridos

s = espaço percorrido

θ = ângulo percorrido

$$\boxed{s = r\theta}$$



Posição angular

- Podemos descrever o movimento da partícula pelo ângulo percorrido $\theta(t)$, que será proporcional ao tempo.

- Sendo $s = \theta r$, ao percorrer um espaço Δs ao longo do círculo, percorrerá um ângulo $\Delta\theta$, de modo que se tenha $\Delta s = \Delta\theta \cdot r$.

- Dividindo por Δt, o tempo necessário para percorrer o ângulo $\Delta\theta$, temos:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \cdot r \ .$$

Velocidade Angular

- Tomando o limite $\Delta t \to 0$, temos:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cdot r$$

- Onde $\mathrm{v} = ds/dt$ é a velocidade escalar e

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

- é a chamada **Velocidade Angular**,

- pois mede a velocidade de variação do ângulo percorrido.

- Dessa forma, temos:

$$\boxed{\mathrm{v} = \omega \cdot r}$$

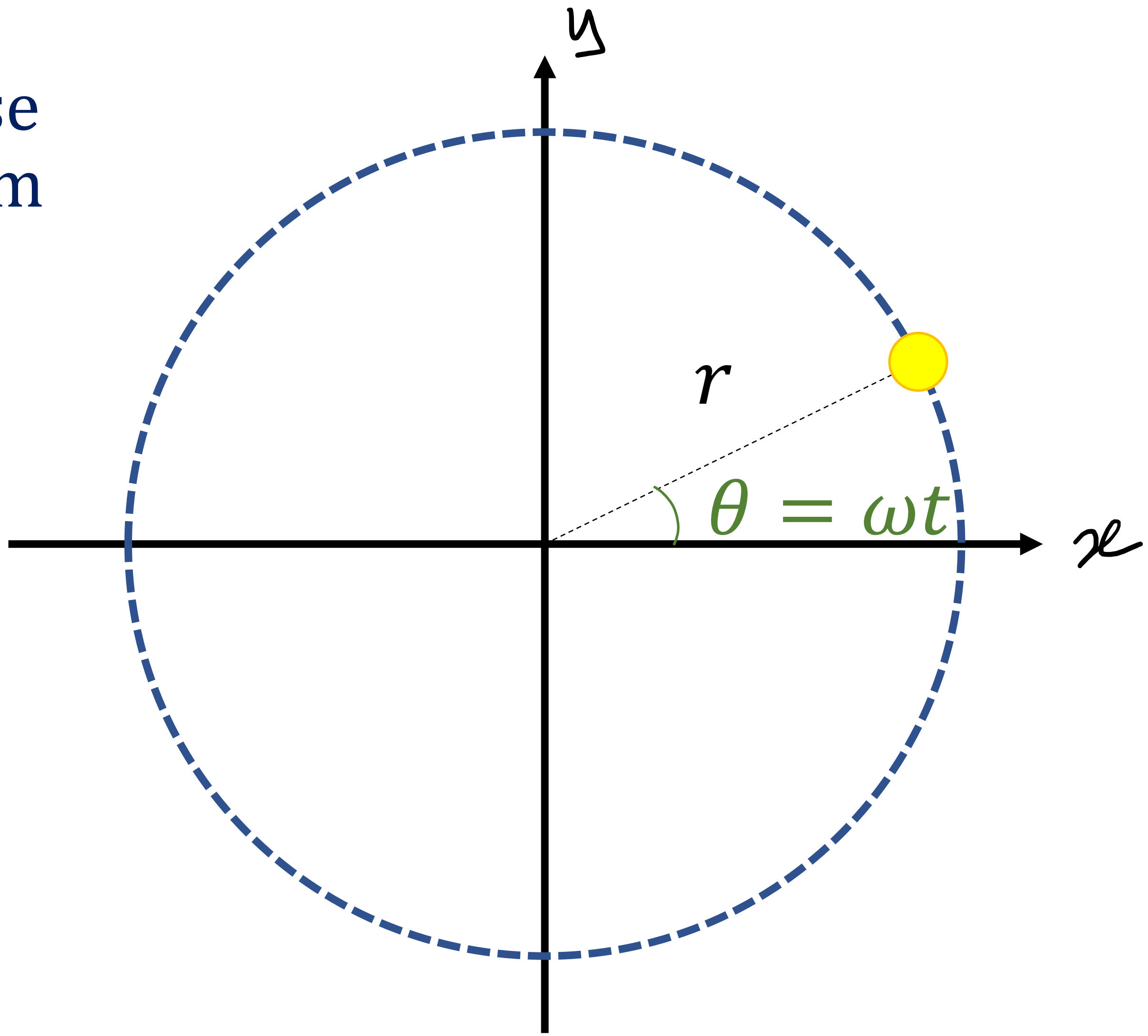
- Integrando $\omega = d\theta/dt = \text{cte.}$, obtemos:

$$\boxed{\theta = \theta_0 + \omega t}$$

MCU – Função Posição $\vec{r}(t)$

- Posicionando os eixos de forma que se tenha $\theta_0 = 0$, podemos escrever assim a posição no movimento circular uniforme:

$$\vec{r}(t) = r\ \cos\,(\omega t)\ \hat{\imath} + r\ \operatorname{sen}\,(\omega t)\,\hat{\jmath}\ .$$



- Dessa forma,

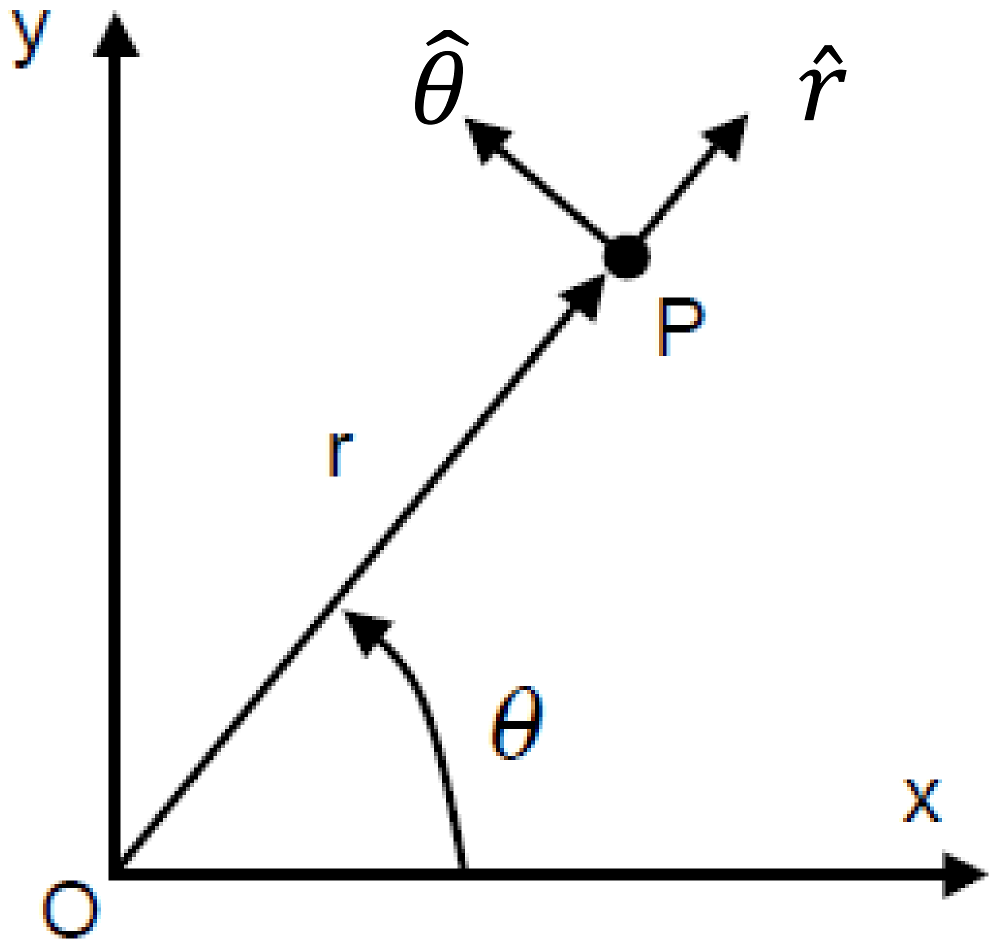
$$x(t) = r\ \cos\,(\omega t)$$
$$y(t) = r\ \operatorname{sen}\,(\omega t)$$

Pausa – Versores das Coordenadas Polares

- Em coordenadas polares, os vetores de base são $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$, cujas expressões em termos dos vetores de base das coordenadas cartesianas $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$ são:

$$\hat{r} = \cos\theta\ \ \hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta\ \ \hat{\jmath}$$

$$\hat{\theta} = -\operatorname{sen}\theta\ \ \hat{\imath} + \cos\theta\ \ \hat{\jmath}$$



MCU – Velocidade

- Derivando $\vec{r}$, obtemos:

$$\vec{\mathrm{v}} = r\omega[-\text{sen}\,(\omega t)\ \hat{\imath} + \cos\,(\omega t)\ \hat{\jmath}]$$

- Ou, em coordenadas polares:

$$\vec{\mathrm{v}} = r\omega\ \hat{\theta}$$

Extraindo o módulo, sendo $\hat{\theta}$ unitário, temos

$$\mathrm{v} = \omega r$$

tomando ω em módulo, o que é compatível com o resultado do início.

- Portanto $\vec{\mathrm{v}}$ está na direção de $\hat{\theta}$, estando no mesmo sentido se $\omega > 0$ e no sentido oposto se $\omega < 0$.

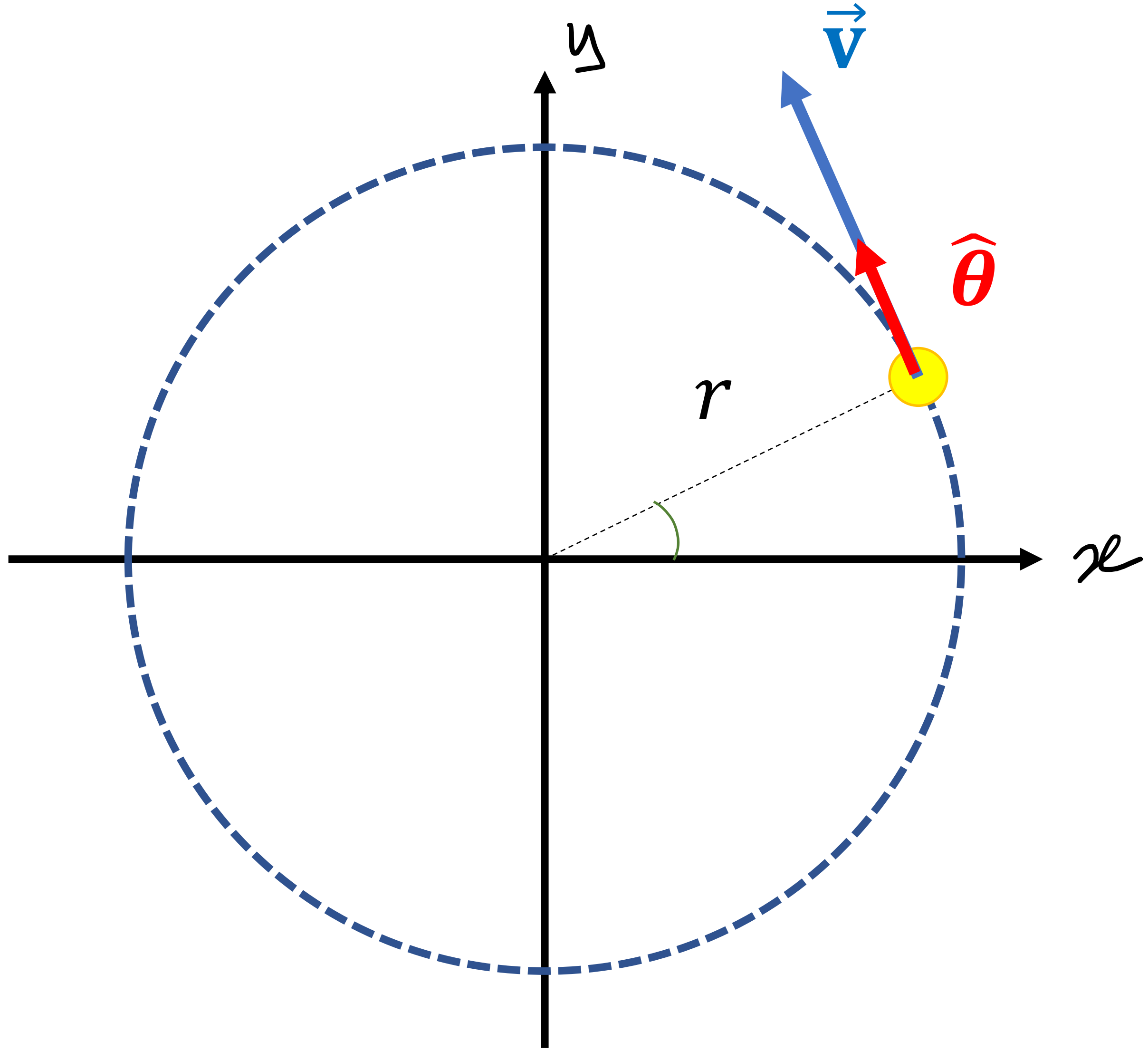
MCU – Função Posição $\vec{r}(t)$

- Isso ilustra o fato de que a velocidade é sempre tangente à trajetória.

- Veja abaixo uma animação, para o exemplo das órbitas planetárias (apenas se r = constante):

- https://phet.colorado.edu/sims/html/gravity-and-orbits/latest/gravity-and-orbits_all.html

- Para visualizar os vetores, marque as opções "path" e "velocity" no menu direito.



Aceleração no MCU

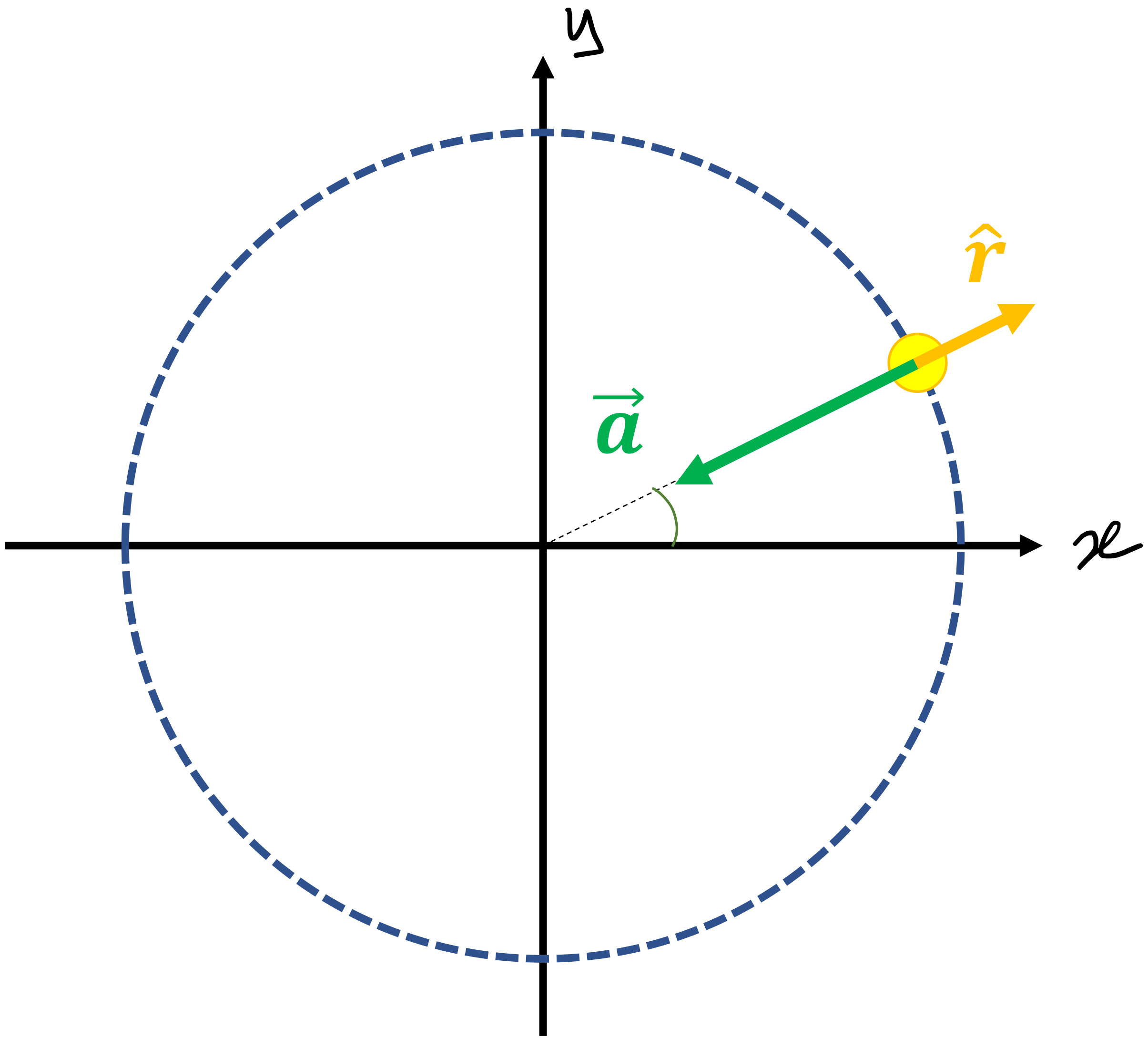
- Derivando $\vec{v}$, obtemos:

$$\vec{a} = -\omega^2 r \,[\cos{(\omega t)}\ \hat{\imath} + \text{sen}\,(\omega t)\,\hat{\jmath}]$$

- Em coordenadas polares:

$$\vec{a} = -\omega^2 r\ \hat{r}$$

- Então $\vec{a}$ aponta no sentido oposto ao de $\hat{r}$, ou seja, aponta para o centro do círculo.



A Aceleração Centrípeta

- Esta aceleração que aponta para o centro é chamada de aceleração centrípeta.

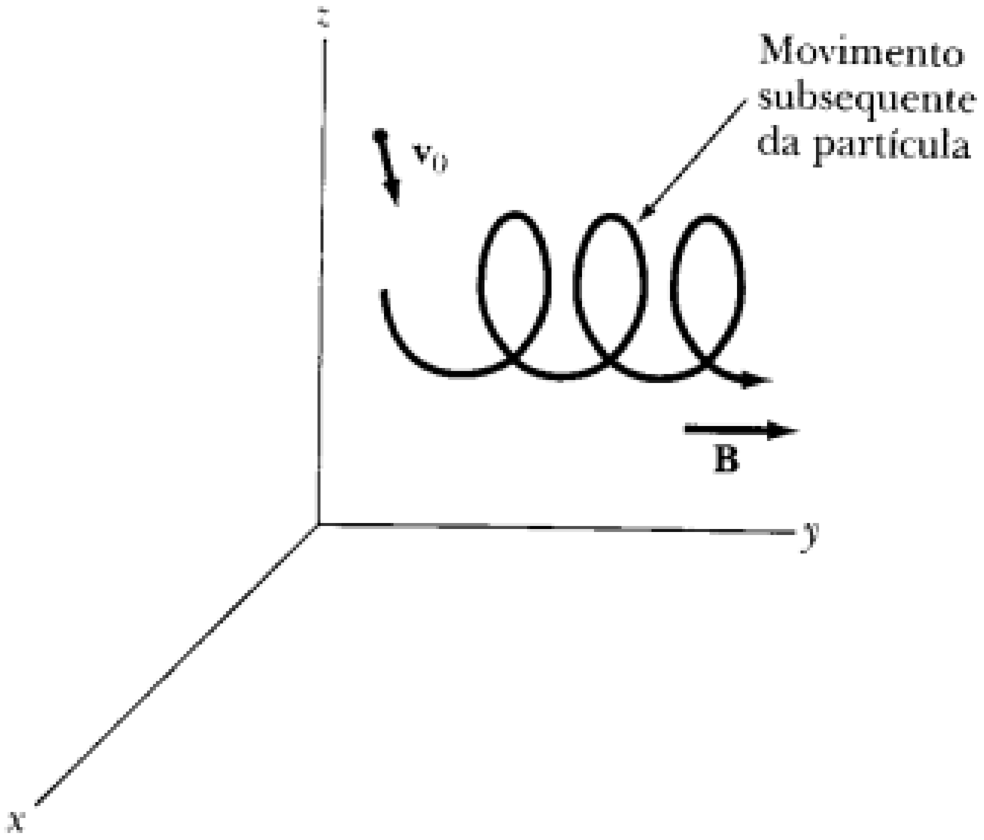
- Note que, como $\mathrm{v} = \omega r$, temos $\omega = \mathrm{v}/r$. Substituindo em $\vec{a}$, obtemos:

$$\vec{a} = -\frac{\mathrm{v}^2}{r}\ \hat{r}$$

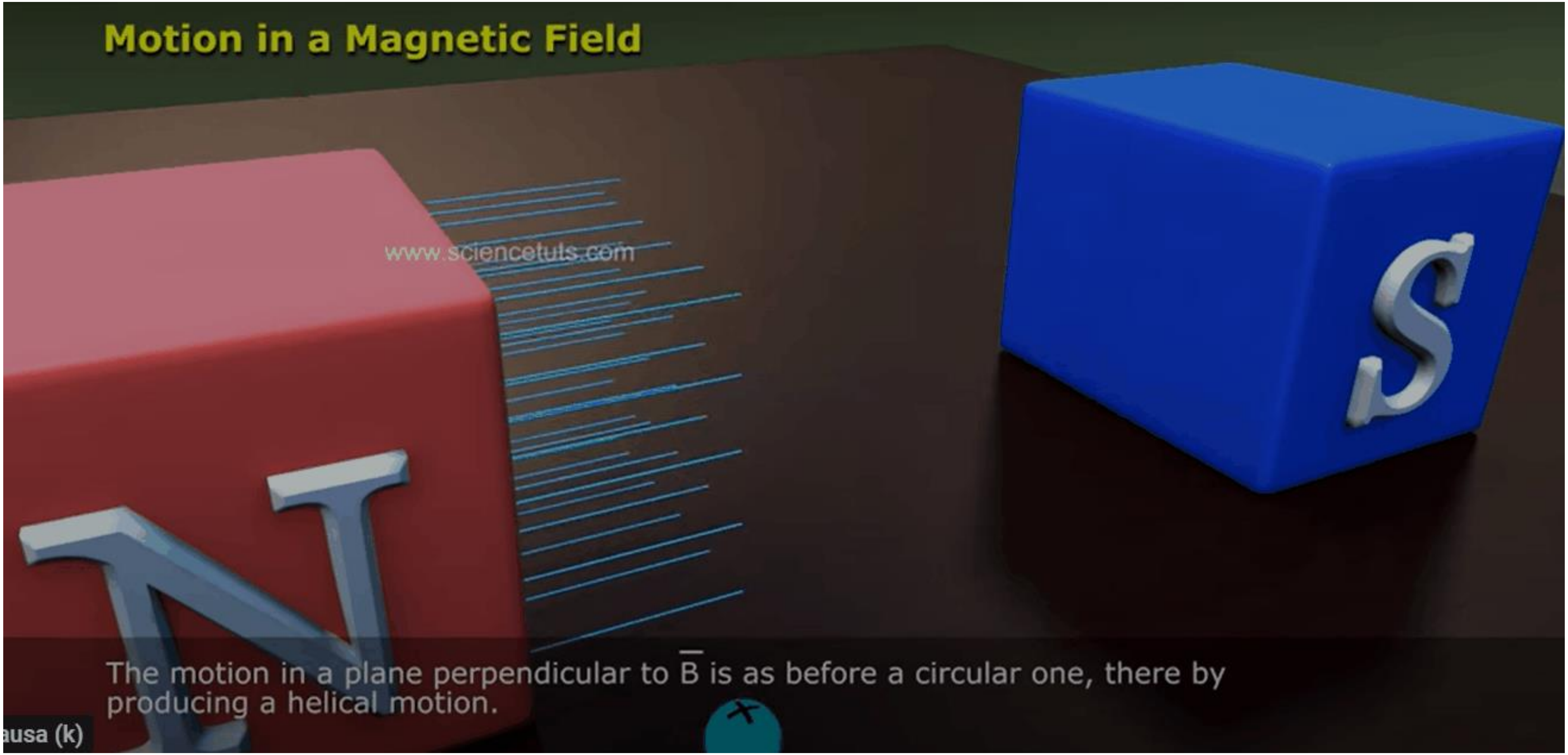
- Em módulo, $a = \mathrm{v}^2/r$, sendo v a velocidade escalar.

4.8. Movimento em Três Dimensões.
Exemplo: Movimento Helicoidal

- Uma partícula carregada sujeita a um campo magnético uniforme, dependendo das condições iniciais, pode experimentar um movimento helicoidal (formato de hélice).



- Para uma referência, veja o livro de S.T. Thornton e J.B. Marion, *Dinâmica Clássica de Partículas e Sistemas,* Exemplo 2.10, um conteúdo da disciplina de Mecânica Clássica I, que exige o conhecimento de equações diferenciais. A figura foi retirada desse livro.



https://www.youtube.com/watch?v=84ZTzeCfswg&t=130s

Movimento Helicoidal – Função Posição $\vec{r}(t)$

- Posição no Movimento Helicoidal em torno do eixo z, subindo com velocidade constante v_z, sendo R e ω constantes:

$$\vec{r}(t) = R \cdot \cos(\omega t)\ \hat{\imath} + R \cdot \mathrm{sen}\,(\omega t)\,\hat{\jmath} + \mathrm{v}_z t\,\hat{k}\ .$$

- Então:

$$x(t) = R \cdot \cos(\omega t)$$
$$y(t) = R \cdot \mathrm{sen}\,(\omega t)$$
$$z(t) = \mathrm{v}_z t$$

Exercícios

1. Calcule a velocidade $\vec{\mathrm{v}}(t)$.

2. Calcule o seu módulo, $\mathrm{v}(t)$.

3. Calcule a aceleração $\vec{a}(t)$ e seu módulo $a(t)$, para verificar que estes resultados correspondem ao mesmo resultado para um movimento circular em torno do eixo z.