Universidade Federal do Pará

Instituto de Ciências Exatas e Naturais

Faculdade de Física

Teoria dos Conjuntos e Conjuntos Numéricos

Prof. Isaac Torres

https://itsufpa.wixsite.com/prof-isaac-torres

Representando Conjuntos e Elementos; Pertinência

- Um conjunto é um ente matemático definido pelos axiomas da teoria dos conjuntos, como comentado antes.

- Intuitivamente, é uma coleção de objetos.

- Pare e pense: essa noção intuitiva não define nada, é apenas uma definição circular, recorre a si mesma para se definir.

- Então vamos supor que temos uma teoria dos conjuntos que corresponde a essa noção intuitiva, mas com uma boa fundamentação lógica.

Representando Conjuntos e Elementos; Pertinência

- Conjuntos e elementos podem ser representados por quaisquer símbolos.

- Em geral, mas não sempre, conjuntos são representados por letras maiúsculas ou combinações com outros símbolos:

$$A, B, C, X, \mathbb{R}, \Omega,$$

- Um conjunto é formado pelos seus elementos e a relação entre conjuntos e elementos é chamada de **pertinência**, sendo representada por $\in$.

- Exemplo: Dado o conjunto

$$X = \{2,4,5,7,10\}$$

- temos

$2 \in X$, que se lê "2 está em X" ou "2 pertence a X"

- Assim, também: $4 \in X$, $5 \in X$, $7 \in X$, $10 \in X$.

Representando Conjuntos e Elementos; Pertinência

- Exemplo: Dado o conjunto
$$X = \{2,4,5,7,10\}$$
- temos

$2 \in X$, que se lê "2 está em X" ou "2 pertence a X"

- Assim, também: $4 \in X$, $5 \in X$, $7 \in X$, $10 \in X$.

- Por outro lado, quando um elemento não pertence ao conjunto, como é o caso de -1 em relação ao conjunto X acima, escrevemos
$$-1 \notin X \quad .$$
- Da mesma forma: $\pi \notin X$, $e \notin X$, $9 \notin X$ etc.

Exercício

Utilizando os símbolos $\in$ ou $\notin$, relacione os elementos com os conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7, ...\}$ e $B = \{-1, -3, -5, -7, ...\}$.

a) 3 e A
b) 5 e B
c) -1 e A
d) 7 e A
e) -3 e B
f) -7 e A

Relação de inclusão e a implicação lógica

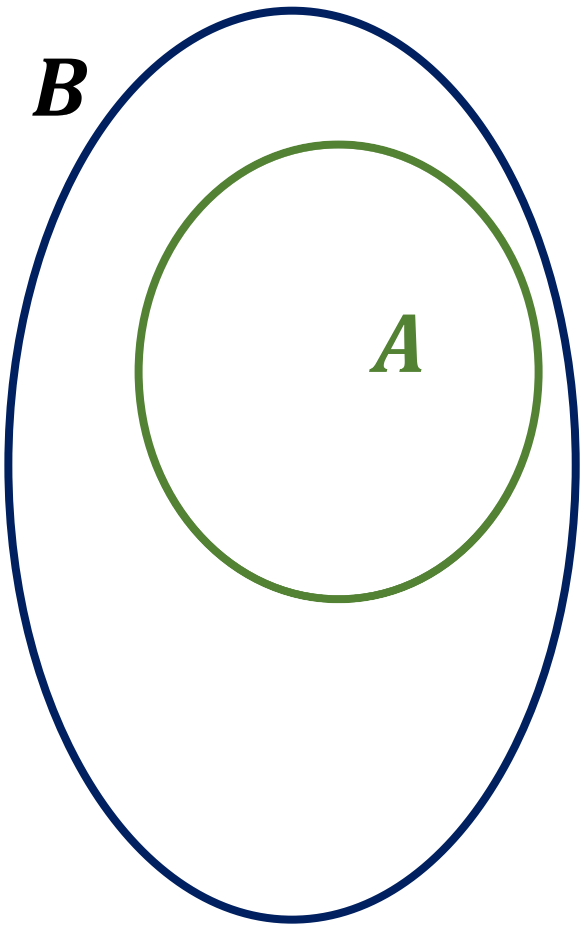
- Considere dois conjuntos quaisquer A e B.

- Suponha que se verificou que os conjuntos A e B satisfazem à seguinte propriedade:

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$

- Neste caso, todos os elementos de A são também elementos de B, então dizemos que A é subconjunto de B, ou que A está contido em B, e representamos esta ideia por

$$A \subset B$$



Representação gráfica muito usada em conjuntos, chamada diagrama de Venn

Igualdade entre Conjuntos

- Embora num nível mais superficial seja fácil identificar quando dois conjuntos são iguais, para demonstrações mais abstratas é interessante ter uma definição precisa e sem qualquer ambiguidade.

- Dois conjuntos A e B serão iguais quando um for subconjunto do outro, ou seja, quando $A \subset B$ e $B \subset A$.

Exemplo

- Os conjuntos

$$A = \{n \in \mathbb{Z}\,; -5 + 4n = 7\}$$
$$B = \{3\}$$

- são iguais, embora, à primeira vista, sejam definidos de formas diferentes.

- Demonstrar que $B \subset A$ significa mostrar que 3 é um número inteiro tal que a equação $-5 + 3n = 7$ vale para $n = 3$.

- Demonstrar que $A \subset B$ significa mostrar que *todo número inteiro n* que satisfaz a equação $-5 + 4n = 7$ está contido em $\mathrm{B} = \{3\}$, ou seja, que 3 é a única solução da equação.

Exercícios

Propostos

5 Utilizando os símbolos $\subset$ ou $\not\subset$, relacione os conjuntos $A = \{0, -1, -3, -5\}$, $B = \{-3, -5\}$ e $C = \{0, -1\}$.

a) A e B
b) B e A
c) A e C
d) C e A

6 Utilizando os símbolos $\subset$ ou $\not\subset$, relacione os conjuntos $A = \{x \mid x$ é um estado físico da matéria$\}$, $B = \{$sólido, líquido$\}$ e $C = \{$líquido, gasoso$\}$.

a) A e B
b) B e A
c) A e C
d) C e A

Definindo um Subconjunto por uma Propriedade: O Axioma da Especificação

- O Axioma da Especificação da teoria dos conjuntos nos garante que, dado um certo conjunto A, podemos definir um subconjunto B deste conjunto A a partir de uma dada propriedade $p(x)$, ou seja, uma sentença aberta, relativa aos elementos de A. Este conjunto é representado assim:

$$B = \{x \in A \,; p(x)\,\}$$

- Obs.: pode ser ; (ponto e vírgula), : (dois pontos) ou | (barra).

Definindo um Subconjunto por uma Propriedade: O Axioma da Especificação

- **Exemplo a)** Sendo o conjunto $A = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, determine os subconjuntos abaixo:

- $B = \{n \in A\, ; n \text{ é par}\}$
- $C = \{n \in A\, ; n \text{ é ímpar}\}$
- $X = \{n \in A\, ; 2n + 1 = 5\}$
- $Y = \{n \in A\, ; 3n - 4 = 20\}$
- $Z = \{n \in A\, ; 10 \leq n^2 < 64\}$
- $U = \{n \in A\, ; 10 < 7n + 20 < 64\}$

O Conjunto Vazio

- Como a propriedade $p(x)$ é completamente genérica (desde que não seja auto-referente, ou seja, se refira a apenas elementos de A, não o próprio A), podemos colocar qualquer condição, inclusive uma condição contraditória.

- Em particular, considere a propriedade:

$$p(x): \qquad x \neq x$$

- Esta propriedade é sempre falsa, de modo que o subconjunto assim definido, que é

$$\{x \in A \,; x \neq x\}$$

- não pode possuir nenhum elemento.

O Conjunto Vazio

- Este conjunto é chamado conjunto vazio, representado por $\emptyset$. Ou seja:

$$\emptyset = \{x \in A \,;\, x \neq x\}$$

- Portanto, o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto A.

- Outra propriedade dele é a **unicidade**. Isso pode ser demonstrado e a demonstração ilustra como funcionam demonstrações de unicidade.

- Suponha que existam dois conjuntos vazios, talvez diferentes, $\emptyset_1$ e $\emptyset_2$.

- Então, pela propriedade acima, $\emptyset_1 \subset \emptyset_2$ e $\emptyset_2 \subset \emptyset_1$, o que corresponde à definição de igualdade entre conjuntos, provando que $\emptyset_1 = \emptyset_2$, ou seja, eles são o mesmo conjunto, o conjunto vazio.

Intersecção e o conectivo "e"

- A partir de dois conjuntos A e B, podemos obter um terceiro conjunto (que pode ser ou não vazio) através da seguinte propriedade:

$$x \in A \quad \text{e} \quad x \in B$$

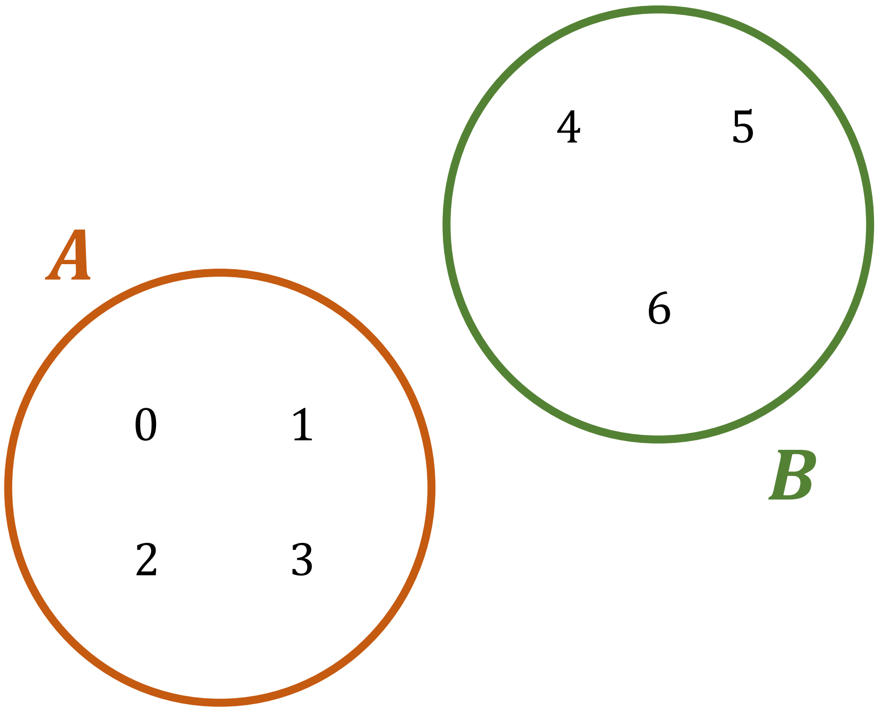
- Este conjunto é chamado a intersecção de A e B e é representado por $A \cap B$:

$$A \cap B = \{x \in A\,; x \in B\} = \{x \in B\,; x \in A\}$$

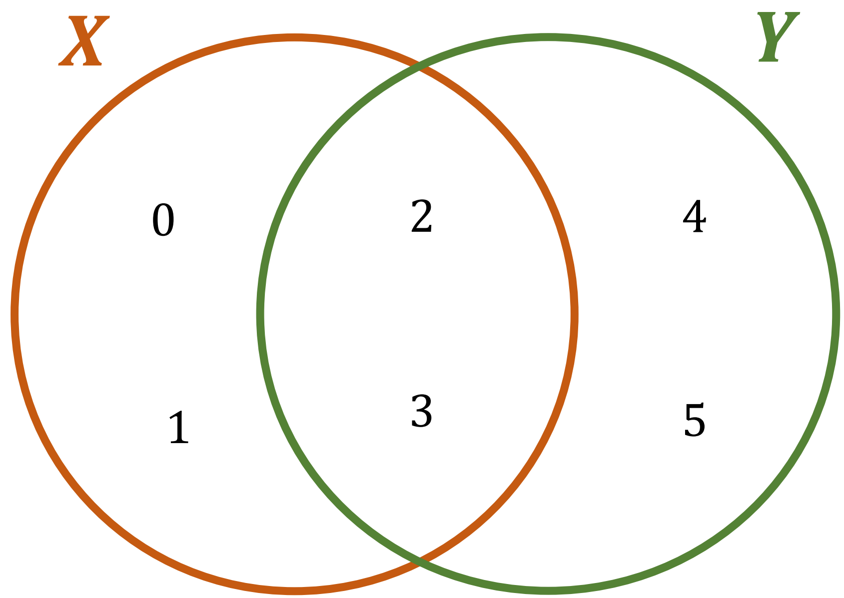
Exemplos de Intersecção

- A Intersecção pode ser vazia ou não-vazia:

$$A = \{0, 1, 2, 3\}$$
$$B = \{4, 5, 6\}$$
$$A \cap B = \emptyset$$



$$X = \{0, 1, 2, 3\}$$
$$Y = \{2, 3, 4, 5\}$$
$$X \cap Y = \{2, 3\}$$



Exercício

Dados os conjuntos

$$A = \{a, b, c, d\}$$
$$B = \{b, c, d, e\}$$
$$C = \{c, e, f\}$$

Descreva os conjuntos:

a) $A \cap B$

b) $A \cap C$

c) $A \cap B \cap C$

Propriedades da Intersecção

- A definição de intersecção de conjuntos permite demonstrar as seguintes propriedades, válidas para quaisquer conjuntos A, B e C:

1) $\mathrm{A} \cap \emptyset = \emptyset$
2) $\mathrm{A} \cap \mathrm{A} = \mathrm{A}$
3) $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{B} \cap \mathrm{A}$ (comutatividade)
4) $\mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cap \mathrm{C}$ (associatividade)

- Dentre outras.

União e o conectivo "ou"

- A partir de dois conjuntos A e B, podemos obter um terceiro conjunto através da seguinte propriedade:

$$x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B$$

- Este conjunto é chamado a união de A e B e é representado por $A \cup B$:

$$A \cup B = \{x\,;\, x \in A \ \text{ou}\ x \in B\}$$

Exemplos

- **Exemplo a)** Dados $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{4,5,6\}$, temos $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$

- Note que não repetimos elementos, basta representa-los uma vez.

- **Exemplo b)** Dados $A = \{n \in \mathbb{Z}\,; n \text{ é ímpar}\}$ e $B = \{n \in \mathbb{Z}\,; n \text{ é par}\}$, temos:

- $A \cup B = \mathbb{Z}$,

- pois todo número inteiro ou é par ou é ímpar.

Propriedades da União

- A definição de união de conjuntos permite demonstrar as seguintes propriedades, válidas para quaisquer conjuntos A, B e C:

1) $\mathrm{A} \cup \emptyset = \mathrm{A}$
2) $\mathrm{A} \cup \mathrm{A} = \mathrm{A}$
3) $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{B} \cup \mathrm{A}$ (comutatividade)
4) $\mathrm{A} \cup (\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cup \mathrm{C}$ (associatividade)

- Dentre outras.

Algumas Propriedades Envolvendo União e Intersecção

- Dados três conjuntos A, B e C, valem as propriedades:

1) $\mathrm{A} \cup (\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cap (\mathrm{A} \cup \mathrm{C})$

2) $\mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{C})$

3) Quando A e B tiverem um número finito de elementos, sendo $n(X)$ o número de elementos de um conjunto finito, temos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

- As demonstrações podem ser feitas usando as regras da lógica estudadas aqui, as definições de união e intersecção e, para 3), é necessário usar o chamado Princípio da Indução, que não abordaremos aqui, mas está disponível nas referências.

O conjunto $\mathbb{N}$ dos Números Naturais

- O Conjunto $\mathbb{N}$ é o **conjunto dos números naturais**, onde parte dos autores inclui o número 0 e outra parte não inclui. Isso é irrelevante para qualquer aplicação. Vamos considerar:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

- Este conjunto é usado para contagem (números cardinais) e ordenamento (números ordinais) de outros conjuntos.

- É também a referência do menor "tamanho" de infinito que existe, o chamado infinito enumerável.

O conjunto $\mathbb{Z}$ dos Números Inteiros

- O conjunto $\mathbb{Z}$ é o **conjunto dos números inteiros**, o que inclui os naturais, os seus opostos negativos e o zero:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

- Os números inteiros são obtidos a partir dos naturais com a exigência de que sempre seja possível fazer a operação de diferença.

- No entanto nem sempre é possível realizar em $\mathbb{Z}$ a divisão :(

O conjunto $\mathbb{Q}$ dos Números Racionais

- O conjunto $\mathbb{Q}$ é o **conjunto dos números racionais**, o que inclui os inteiros e as frações montadas a partir desses números, com denominador diferente de zero:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \; ; p, q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0 \right\}$$

- Os números racionais são obtidos a partir dos inteiros com a exigência de que sempre seja possível fazer a operação de divisão, com denominador não-nulo.

- Os números racionais são, portanto, ótimos para realizar soma, diferença, produto e divisão.

Propriedades dos Números Racionais

- A operação de soma entre números racionais possui quatro propriedades:

1) $x + y = y + x$ (comutatividade da soma)

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (associatividade da soma)

3) Existe um elemento neutro 0 tal que $x + 0 = x$

4) Para todo x, existe um inverso aditivo $-x$ tal que $x + (-x) = 0$

- E o produto satisfaz cinco propriedades:

5) $xy = yx$ (comutatividade do produto)

6) $x(yz) = (xy)z$ (associatividade do produto)

7) Existe um elemento neutro 1 tal que $x \cdot 1 = x$

8) Para todo $x \neq 0$, existe um inverso x^{-1} tal que $xx^{-1} = 1$

9) $x(y + z) = xy + xz$ (distributividade)

Os números tem uma Estrutura!

- As oito propriedades anteriores significam que podemos fazer todas as operações com frações que você aprendeu.

- Elas permitem dizer que as equações abaixo todas tem solução em $\mathbb{Q}$:

a) $n + 10 = 2$ Esse tipo de eq. não tinha solução em $\mathbb{N}$, por isso se cria $\mathbb{Z}$

b) $2x = 3$ Esse tipo de eq. não tinha solução em $\mathbb{Z}$, por isso se cria $\mathbb{Q}$

- As soluções são, respectivamente, -8 e $3/2$.

Os números tem uma Estrutura!

- Portanto, os números racionais são mais robustos algebricamente do que os inteiros e os naturais, pois em $\mathbb{Q}$ conseguimos resolver problemas que os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ não resolvem, ***graças às suas propriedades***.

- As 9 propriedades anteriores dão a $\mathbb{Q}$ o que chamamos **estrutura algébrica de corpo.**

- Vamos abstrair mais um pouco?

- Qualquer conjunto que satisfaça as 9 propriedades anteriores é chamado de corpo.

- Corpo é a estrutura algébrica do conjunto $\mathbb{Q}$, que existe enquanto propriedade matemática, independente do exemplo que se queira pensar.

O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ e suas Propriedades

- Nesse sentido, como resolver uma equação do tipo

$$x^2 = 2 \ ?$$

- Os números racionais não são capazes, como se pode demonstrar (pesquise).

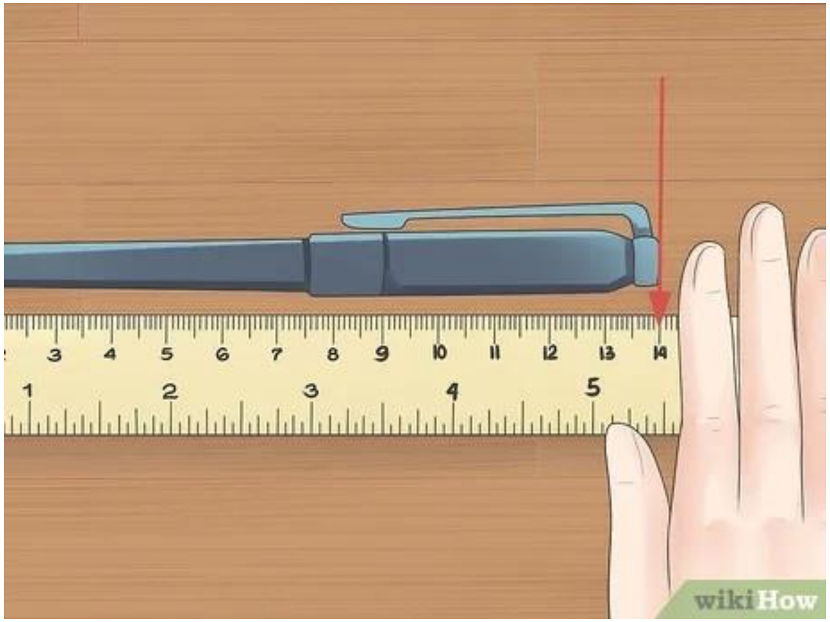
- Para isso, é necessário um procedimento matemático chamado **completamento**, que permite construir um conjunto com as mesmas propriedades do conjunto $\mathbb{Q}$, ou seja, um corpo, porém, no qual equações do tipo acima tem solução.

- Esse processo tem como resultado o chamado **conjunto dos números reais**, representado por $\mathbb{R}$.

O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ e suas Propriedades

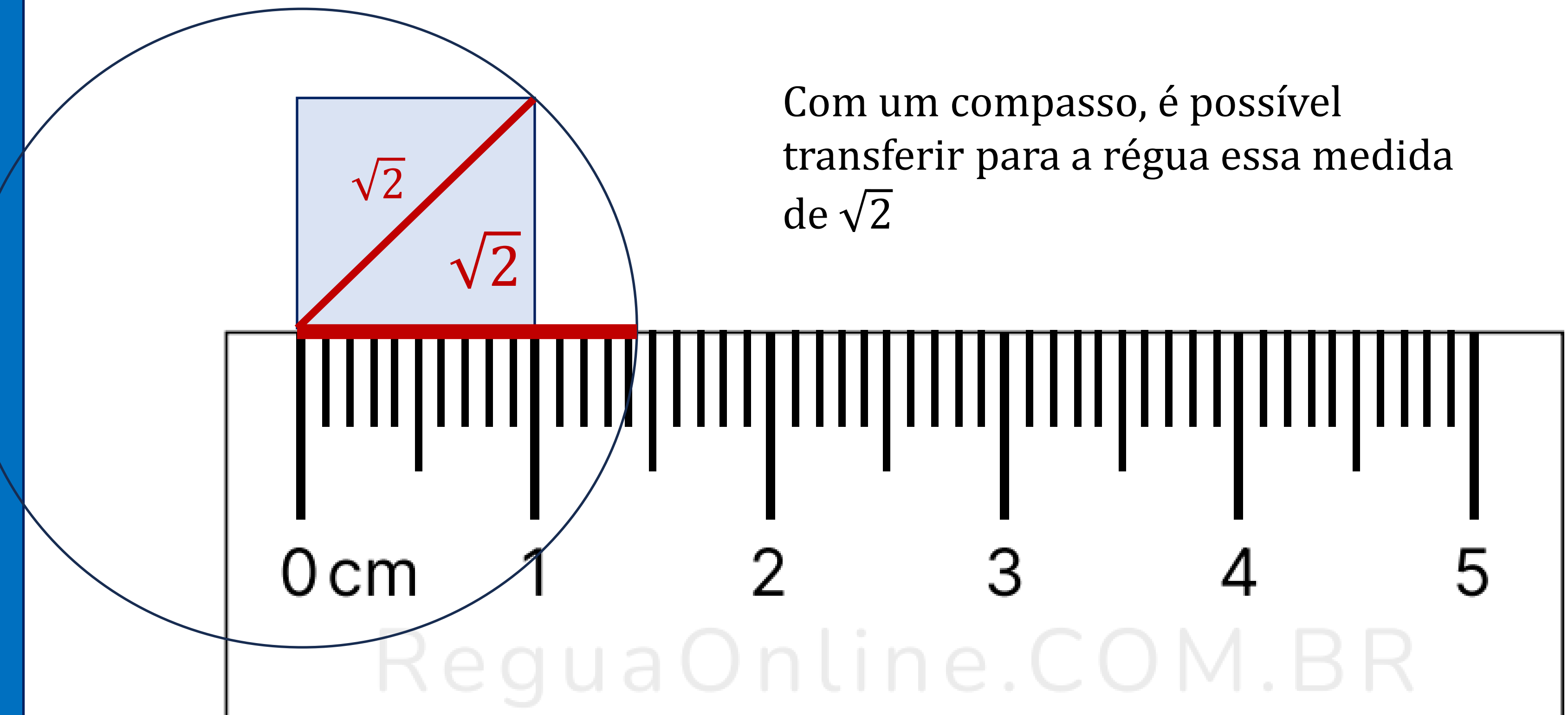
- A passagem de $\mathbb{Q}$ para $\mathbb{R}$ é complicada de realizar, mas muito fácil de entender, para nossa sorte.

- O conjunto $\mathbb{Q}$ possui todas as frações, positivas e negativas. Elas *quase* completam a reta, olhando não é possível ver buracos. Tente medir qualquer coisa com uma régua, você nunca ficará com a sensação de que falta régua, mas o resultado sempre será um número racional.



Buracos na “reta” dos racionais

- Tente agora construir um quadrado de lado igual a 1.
- Quanto mede sua diagonal, ou seja, a reta que une dois vértices opostos?
- Ela vale $\sqrt{2}$, pelo Teorema de Pitágoras.

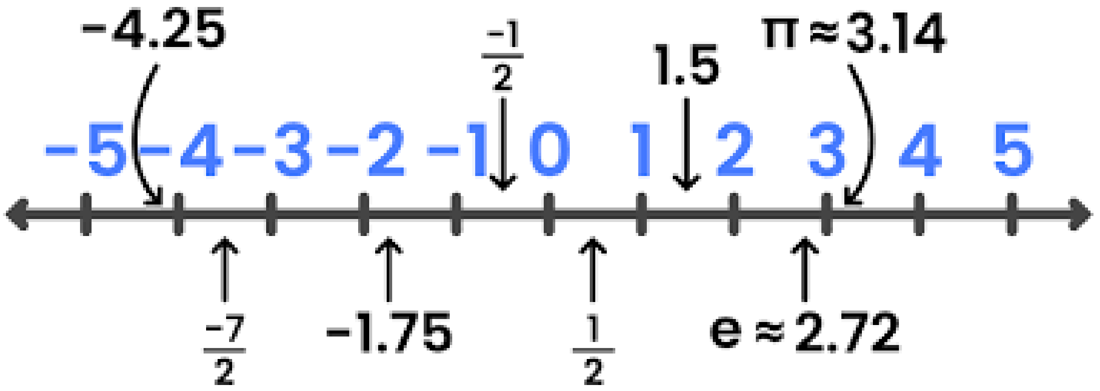


Com um compasso, é possível transferir para a régua essa medida de $\sqrt{2}$

A Reta Real

- Por tudo isso, o conjuntos $\mathbb{R}$ dos números reais é o melhor modelo algébrico que representa uma reta.

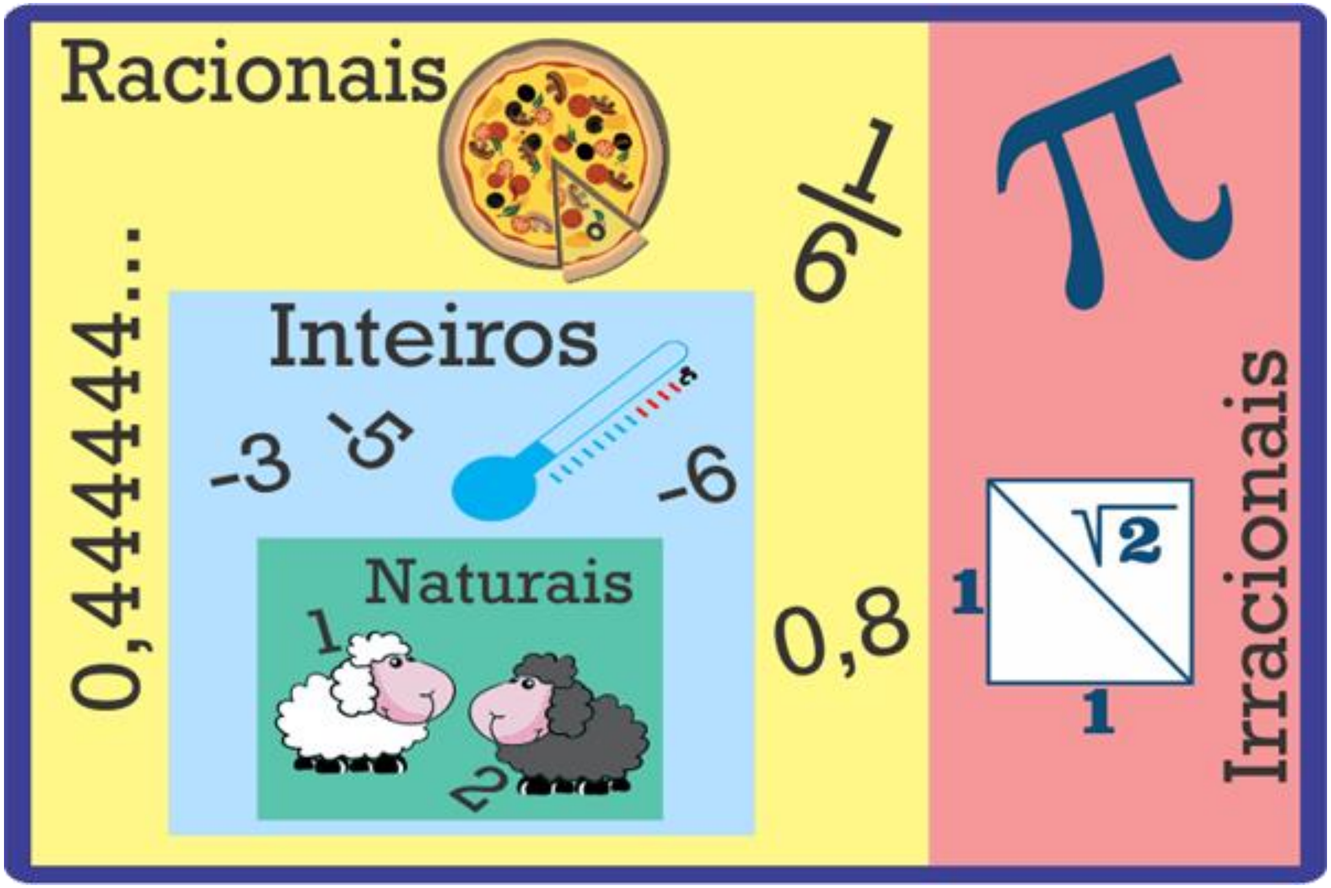
- O chamamos, por isso, de reta real.



- A cada ponto dessa reta corresponde um número real e a cada número real corresponde um ponto na reta.

Resumindo ...

O Conjunto dos Números Reais



Fonte da imagem: tic na matemática

Intervalos de Números Reais, Suas Uniões e Intersecções

- Os intervalos são subconjuntos especiais dos números reais com a propriedade de conter todos os elementos entre dois elementos dados.

- Há vários tipos, vamos estuda-los.

Intervalo Fechado

Intervalo fechado

Notação: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$

A este intervalo pertencem todos os números compreendidos entre *a* e *b*, inclusive *a* e *b*.

Exemplo:

Notação: $[2, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 5\}$

A este intervalo pertencem todos os números compreendidos entre 2 e 5, inclusive 2 e 5.

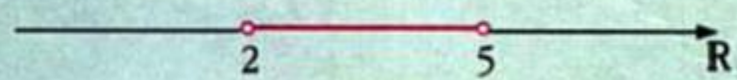
Intervalo Aberto

Intervalo aberto

Notação: $]a, b[= \{x \in R \mid a < x < b\}$

A este intervalo pertencem todos os números compreendidos entre *a* e *b*, não incluindo nem *a* nem *b*.

Exemplo:



Notação: $]2, 5[= \{x \in R \mid 2 < x < 5\}$

A este intervalo pertencem todos os números compreendidos entre 2 e 5, não incluindo 2 e 5.

Intervalo Fechado à Esquerda e Aberto à Direita

Intervalo fechado à esquerda e aberto à direita

Notação: $[a, b[= \{x \in R \mid a \leqslant x < b\}$

A este intervalo pertencem todos os números compreendidos entre ***a*** e ***b***, incluindo ***a*** e não incluindo ***b***.

Exemplo:

Notação: $[2, 5[= \{x \in R \mid 2 \leqslant x < 5\}$

A este intervalo pertencem todos os números compreendidos entre 2 e 5, incluindo o 2 e não incluindo o 5.

Intervalo Aberto à Esquerda e Fechado à Direita

Intervalo aberto à esquerda e fechado à direita

Notação: $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$

A este intervalo pertencem todos os números compreendidos entre ***a*** e ***b***, não incluindo ***a*** e incluindo ***b***.

Exemplo:

Notação: $]2, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leqslant 5\}$

A este intervalo pertencem todos os números compreendidos entre 2 e 5, não incluindo o 2 e incluindo o 5.

Intervalos de Comprimento Infinito

Intervalos indicados pelo símbolo ∞ (infinito)

Notação: $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

Notação: $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

Notação: $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$

Notação: $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$

Notação: $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

- — Os números reais *a* e *b* são denominados extremos dos intervalos.
- — O intervalo é sempre aberto na indicação do infinito.

Exemplos

1 Representar na reta real os intervalos:

a) $]-1, 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leqslant 3\}$

b) $[2, 6] = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 6\}$

c) $]-\infty, 1[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$

2 Escrever a notação para os seguintes intervalos, representados na reta real:

a) 

b) 

c) 

Exercícios

Propostos

62 Represente na reta real os intervalos:

a) $[6, 8] = \{x \in \mathbf{R} \mid 6 \leq x \leq 8\}$

b) $]-3, 5] = \{x \in \mathbf{R} \mid -3 < x \leq 5\}$

c) $]-2, 6[= \{x \in \mathbf{R} \mid -2 < x < 6\}$

d) $[-1, 5[= \{x \in \mathbf{R} \mid -1 \leq x < 5\}$

e) $]-\infty, 1] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 1\}$

f) $]4, +\infty[= \{x \in \mathbf{R} \mid x > 4\}$

g) $\mathbf{R}_+^* =]0, +\infty[= \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$

h) $\mathbf{R}_-^* =]-\infty, 0[= \{x \in \mathbf{R} \mid x < 0\}$

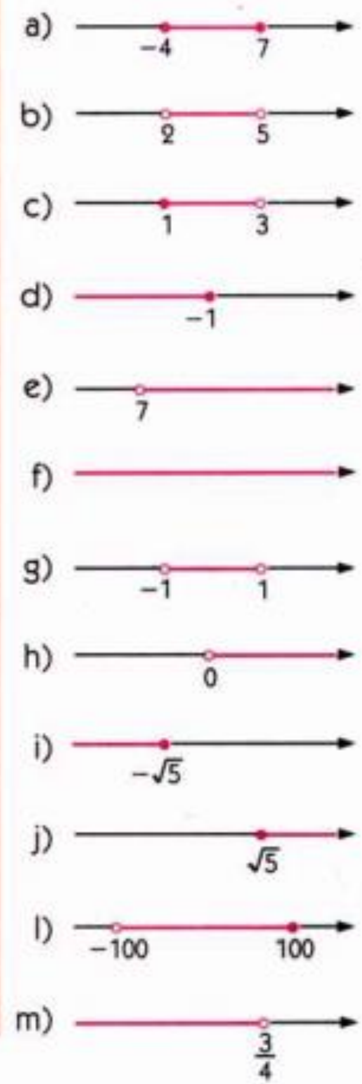
i) $\mathbf{R}_+ = [0, +\infty[= \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0\}$

j) $\mathbf{R}^* = \{x \in \mathbf{R} \mid x \neq 0\} = \mathbf{R} - \{0\}$

l) $\mathbf{R}$

m) $\mathbf{R}$_{1}

63 Escreva a notação para os seguintes intervalos, representados na reta $\mathbf{R}$.

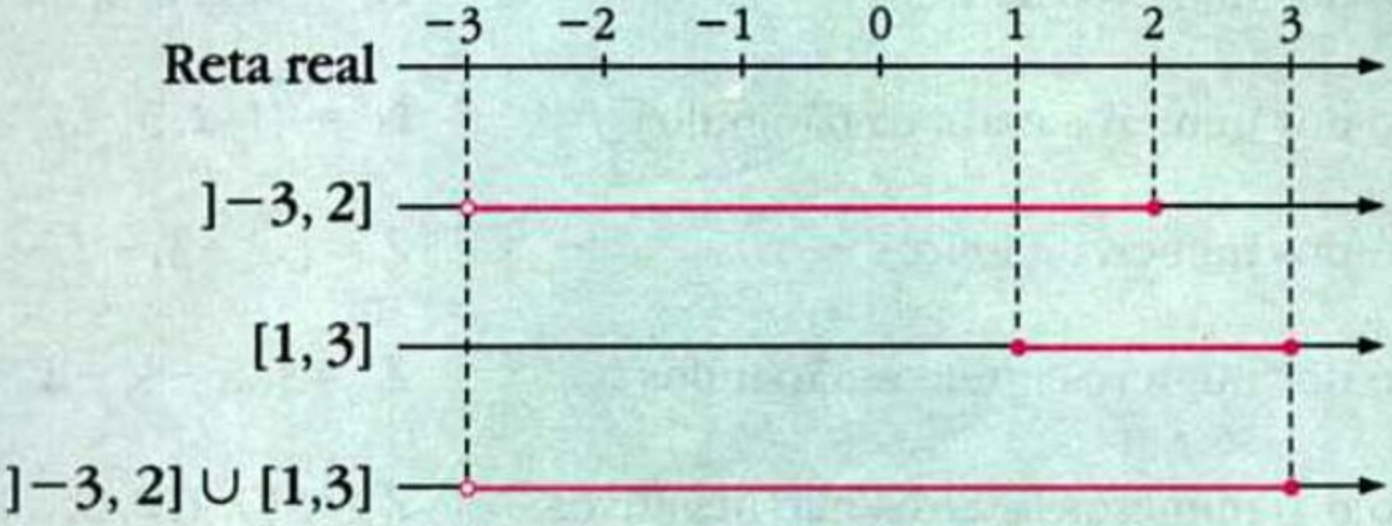


União de Intervalos

- A definição de união de conjuntos se aplica a qualquer tipo de conjunto, inclusive intervalos.

Sejam os intervalos $]-3, 2]$ e $[1, 3]$:

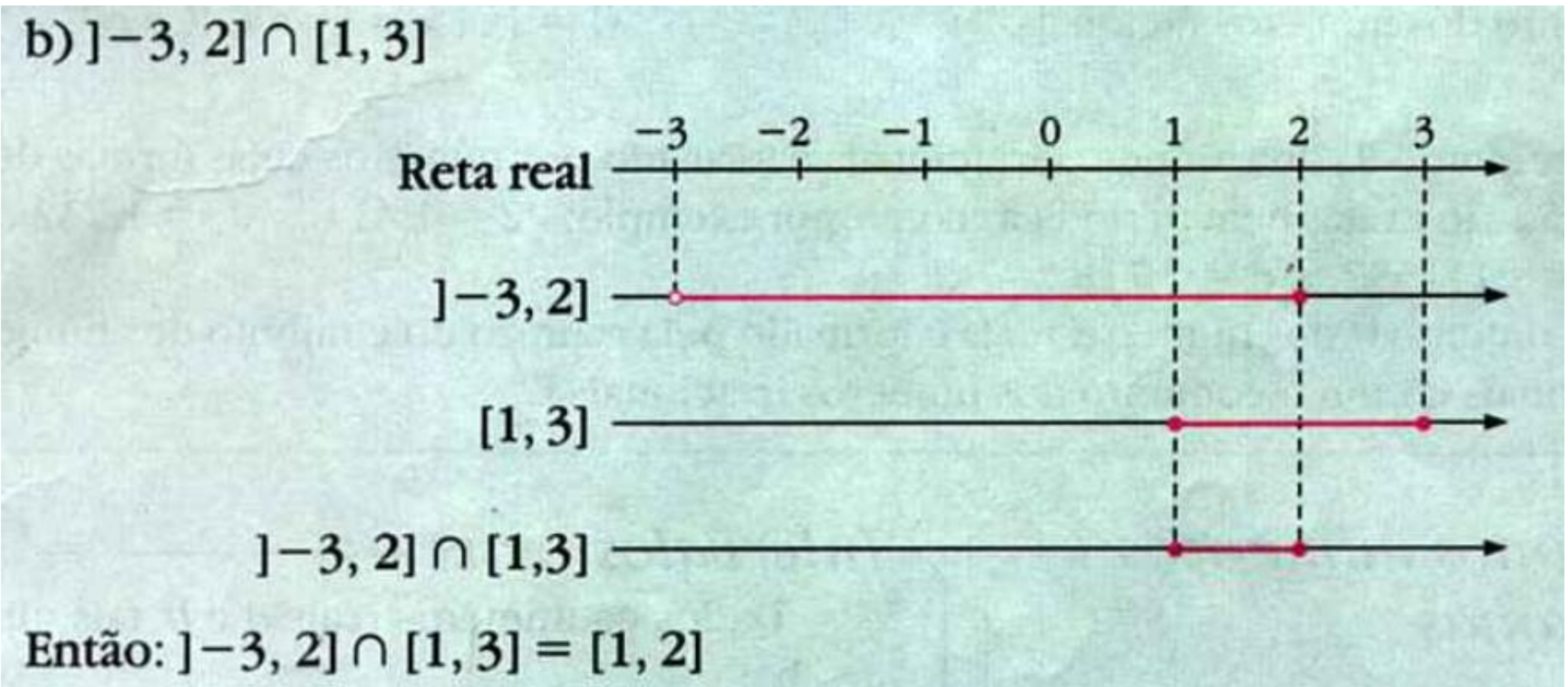
a) $]-3, 2] \cup [1, 3]$



Então: $]-3, 2] \cup [1, 3] =]-3, 3]$

Intersecção de Intervalos

- A definição de intersecção de conjuntos também se aplica a qualquer tipo de conjunto, inclusive intervalos.



Exercícios

Propostos

64 Determine a união dos seguintes intervalos:

a) $[1, 3] \cup [2, 5]$

b) $]-1, 4] \cup [3, 7]$

c) $]2, 4[\cup [1, 3[$

d) $[-5, 5] \cup [0, 3[$

e) $]-\infty, 1] \cup [1, 3]$

65 Determine a intersecção dos seguintes intervalos:

a) $[1, 3] \cap [2, 5]$

b) $[-2, 3] \cap [0, 6]$

c) $]-3, 2] \cap [2, 5]$

d) $]1, 3] \cap]-\infty, 8]$

e) $[-1, 3] \cap]0, +\infty[$

Referências

- B.B. Filho, C.X. da Silva. Matemática, Aula por Aula. Editora FTD.

- G. Iezzi, C. Murakami. *Fundamentos de Matemática Elementar, 1: conjuntos, funções*. 8.ed. Atual Editora, São Paulo, 2011.

- P.R. Halmos. Teoria Ingênua dos Conjuntos. Editora Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 2001.

- E.L. Lima. Curso de Análise, vol. 1. 12. ed. IMPA, Rio de Janeiro, 2010.