Física Básica I

7 – Trabalho e Energia Cinética

7.1. O Conceito de Energia e suas Unidades

- A energia é uma grandeza física relacionada ao movimento e à possibilidade de movimento.

- É uma grandeza escalar, caracterizada, portanto, por um número.

- Dimensão: massa $\times$ comprimento^2 / tempo^2 (justificaremos adiante).

- Unidade no SI: joule (J), sendo

$$1J = 1kg \cdot m^2/s^2$$

- Com o conceito de energia é possível também formular teorias físicas, através do chamado formalismo Lagrangeano e do formalismo Hamiltoniano (disciplina de mecânica analítica ou mecânica clássica II, em nossa grade).

Formas de Energia

- O conceito anterior pode parecer muito **vago**.

- De fato, ele é vago porque precisa abarcar uma série de conceitos diferentes.

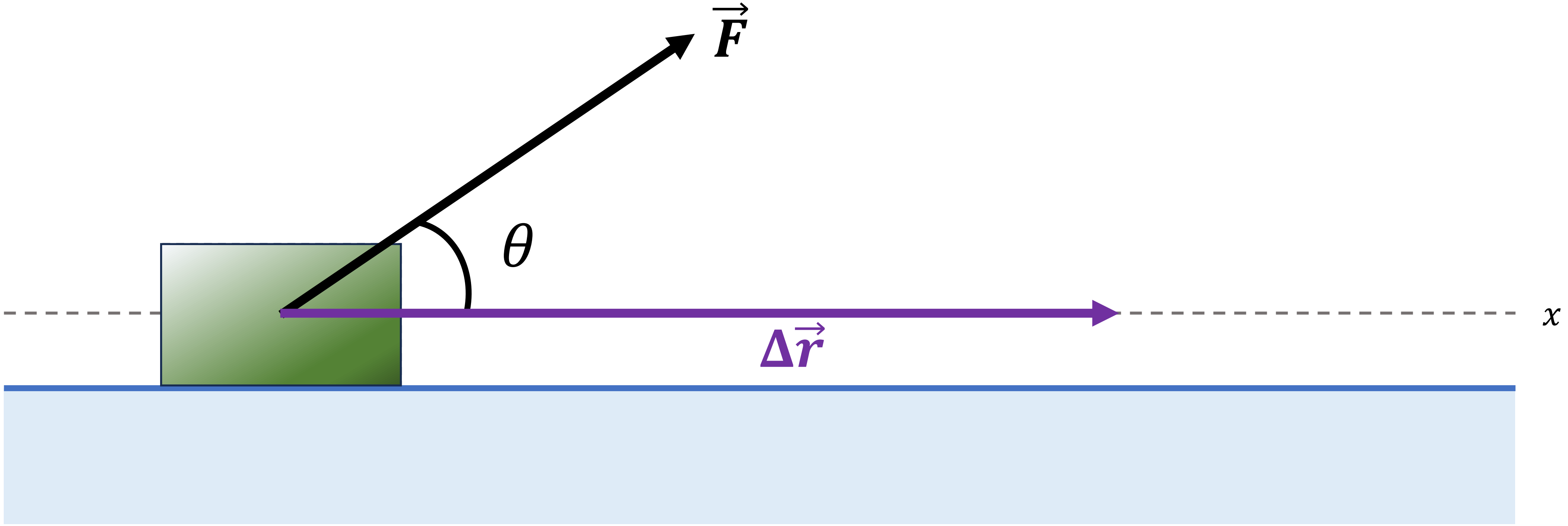
- Veremos a seguir, de forma mais precisa, um primeiro conceito de energia, chamado **trabalho**, que está relacionado ao conceito de força.

- Este conceito conduz naturalmente aos dois tipos fundamentais de energia: a **energia cinética** (que veremos neste mesmo tópico 7, relacionada à velocidade) e a **energia potencial** (tópico 8, relacionada à possibilidade de movimento).

7.2. Trabalho realizado por uma Força Constante

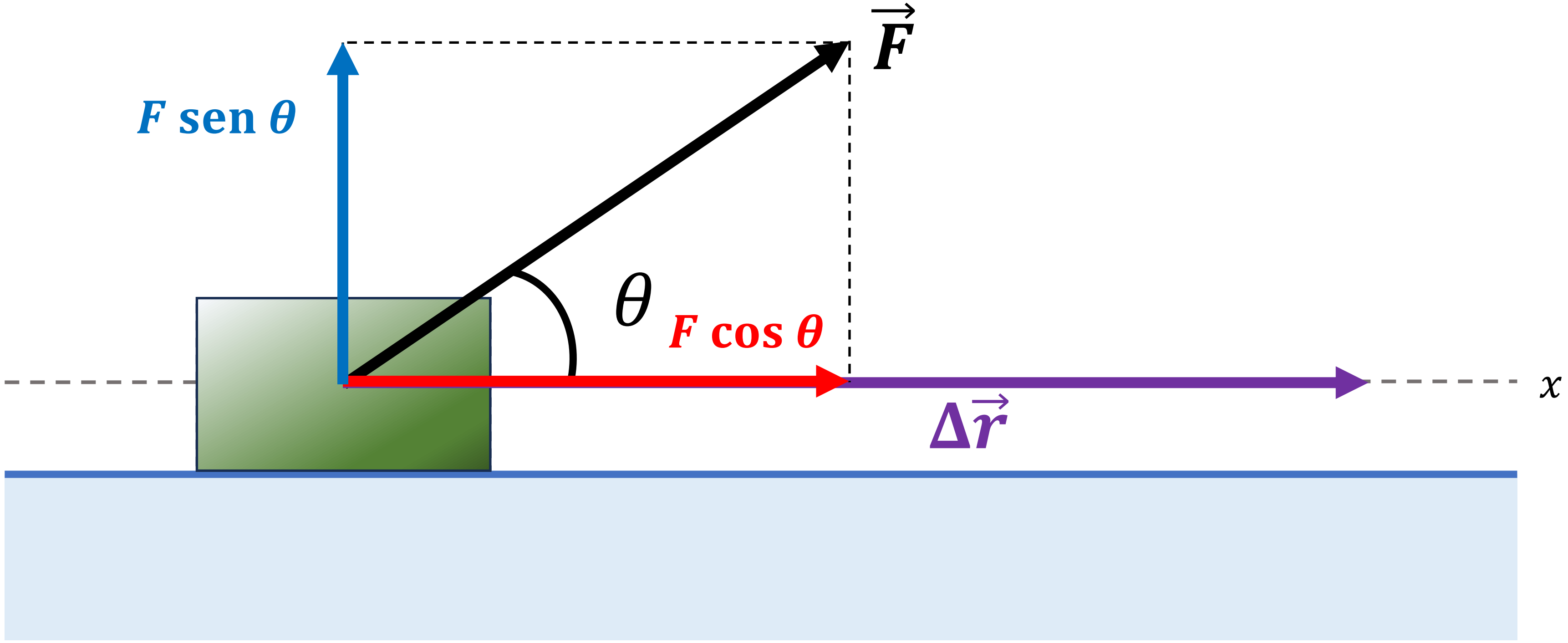
- A primeira forma de energia que vamos estudar é o **trabalho realizado por uma força**.

- Suponha que uma força $\vec{F}$, inicialmente **constante**, atua sobre uma partícula de massa m, formando um ângulo θ com o **deslocamento** (em linha reta) $\Delta\vec{r}$ da partícula.



7.2. Trabalho realizado por uma Força Constante

- A componente de $\vec{F}$ na direção do deslocamento $\Delta\vec{r}$ **ajuda ou atrapalha** o movimento, dependendo do ângulo, e vale $F\cos\theta$.
- A componente de $\vec{F}$ perpendicular a $\Delta\vec{r}$ não influencia no módulo da velocidade, **não ajuda nem atrapalha o deslocamento** em questão, valendo F sen θ.



- Por isso, definimos o **trabalho W** (do inglês "work") como a forma de energia que mede o quanto uma força contribuiu para um deslocamento.

- Esperamos que, quanto maior a força, maior seja o trabalho …

- … e que, quanto maior o deslocamento, maior seja também o trabalho.

- Por isso, definimos o trabalho simplesmente como o produto da componente que contribui com o movimento pelo próprio deslocamento, o que resulta:

$$\boxed{W = F\,\Delta r\cos\theta = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} \quad ,}$$

- Ou seja, o trabalho é, por definição, **o produto escalar entre a força e o deslocamento.**
- **Unidade SI: $\boldsymbol{N\cdot m = J}$.**

Interpretação da definição

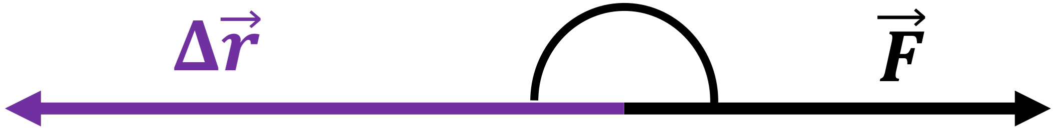
- Para um ângulo de $0°$, a força está na mesma direção e no mesmo sentido do deslocamento, então $\cos 0° = 1 \Rightarrow \boldsymbol{W = +F\,\Delta r}$.

$$\theta = 0°$$

$W > 0$: **Trabalho Motor**

- Para um ângulo de $180°$, a força está na mesma direção, porém no sentido oposto ao deslocamento, então $\cos 180° = -1 \Rightarrow$ $\boldsymbol{W = -F\,\Delta r}$.

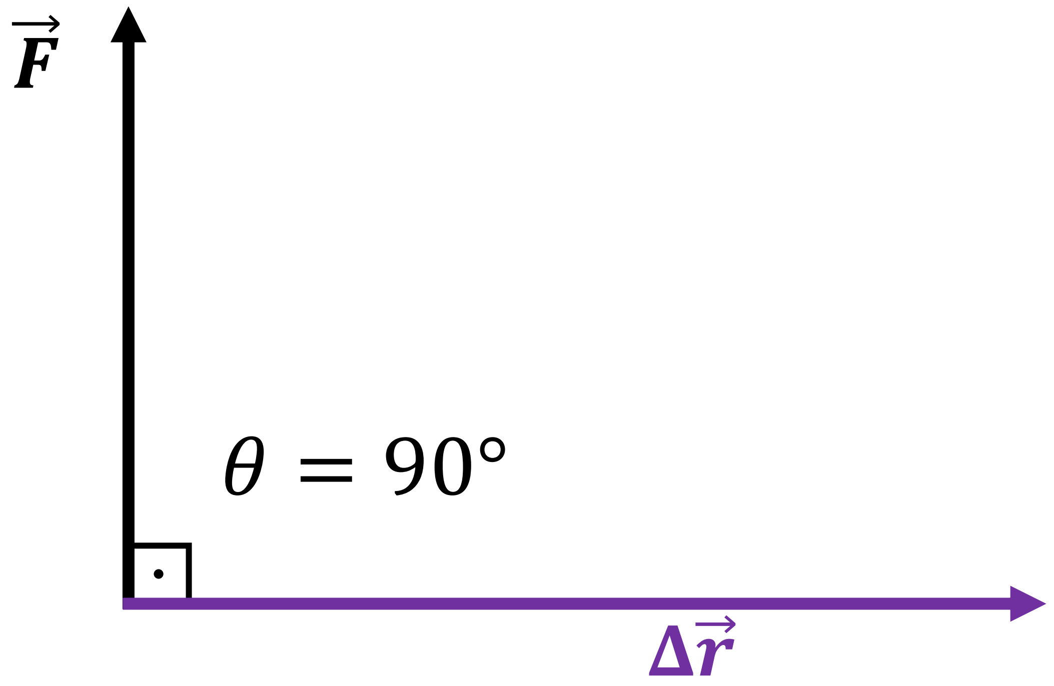
$$\theta = 180°$$



$W < 0$: **Trabalho Resistente**

Interpretação da definição

- Para um ângulo de 90°, a força é perpendicular ao deslocamento, então $\cos 90° = 0 \Rightarrow W = 0$.



- Em outras palavras, uma força perpendicular ao deslocamento não realiza trabalho.

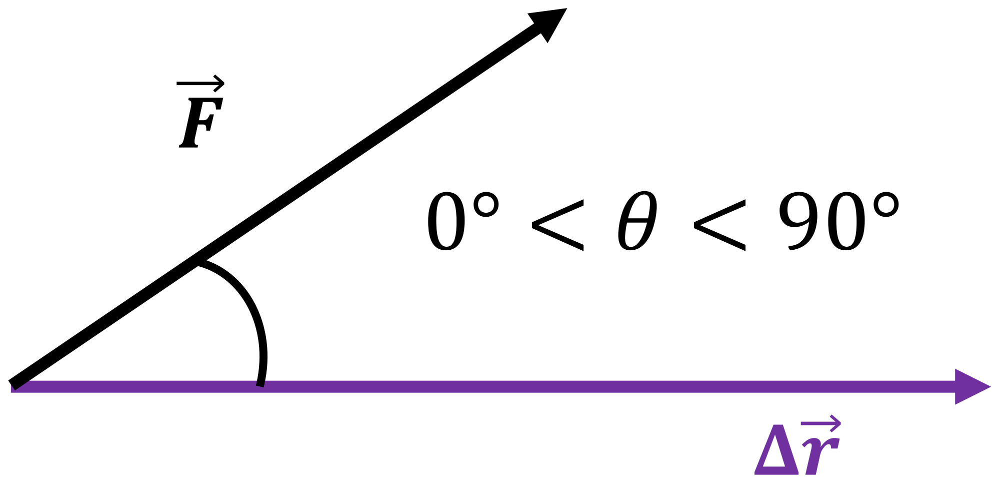
$W = 0$: **Não há Trabalho**

- Por exemplo: toda força centrípeta não realiza trabalho.

- Então, a gravidade, numa órbita circular, não realiza trabalho.

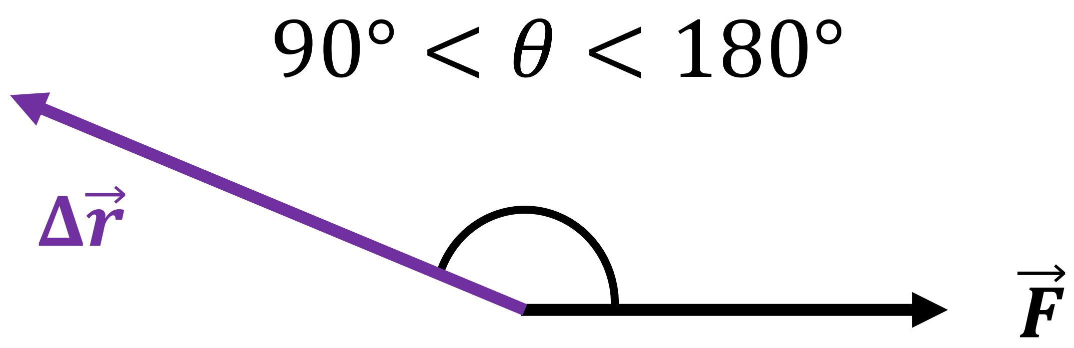
Interpretação da definição

- Para ângulos intermediários $0° < \theta < 90°$, o cosseno é positivo: $\cos\theta > 0 \Rightarrow \boldsymbol{W > 0}$.



$W > 0$: **Trabalho Motor**

- Para ângulos $90° < \theta < 180°$, o cosseno é negativo: $\cos\theta < 0 \Rightarrow \boldsymbol{W < 0}$.



$W < 0$: **Trabalho Resistente**

Exemplo

- Uma força de 200N atua sobre uma partícula num deslocamento de 100m, sendo que a força e o deslocamento formam um ângulo de 49°.
  a) Antes de fazer o cálculo, diga se o trabalho será motor ou resistente.
  b) Determine o trabalho realizado por essa força.
  c) Após o cálculo, confirme que o resultado está de acordo com a).

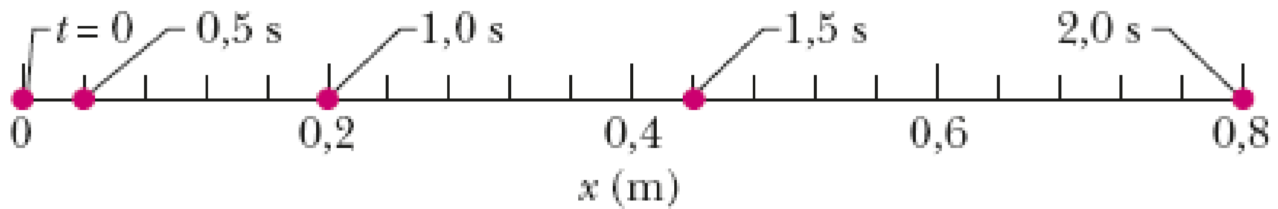
Exercício

- Uma força de 780N atua sobre uma partícula num deslocamento de 2,6m, sendo que a força e o deslocamento formam um ângulo de 133°.
  a) Antes de fazer o cálculo, diga se o trabalho será motor ou resistente.
  b) Determine o trabalho realizado por essa força.
  c) Após o cálculo, confirme que o resultado está de acordo com a).

Exemplos

8 **F** Um bloco de gelo flutuante é colhido por uma correnteza que aplica ao bloco uma força $\vec{F} = (210\ \text{N})\hat{i} - (150\ \text{N})\hat{j}$ fazendo com que o bloco sofra um deslocamento $\vec{d} = (15\ \text{m})\hat{i} - (12\ \text{m})\hat{j}$. Qual é o trabalho realizado pela força sobre o bloco durante o deslocamento?

7 **F** Um corpo de 3,0 kg está em repouso em um colchão de ar horizontal de atrito desprezível quando uma força horizontal constante $\vec{F}$ é aplicada no instante $t = 0$. A Fig. 7.10 mostra, em um gráfico estroboscópico, a posição da partícula a intervalos de 0,50 s. Qual é o trabalho realizado sobre o corpo pela força $\vec{F}$ no intervalo de $t = 0$ a $t = 2{,}0$ s?



7.3. Trabalho Realizado por uma Força Variável

- Vamos generalizar a situação anterior para casos cada vez mais gerais.

- Vamos supor que ainda estamos estudando um movimento em uma dimensão x.

- Mas agora a força F varia com a posição x, ou seja: $F = F(x)$.

- Em cada ponto x, após um deslocamento dx, a força tem um valor $\simeq F(x)$.

7.3. Trabalho Realizado por uma Força Variável

- Desse modo, o trabalho nesse deslocamento pequeno será um diferencial também, dado por $dW = F(x)dx$, onde não precisamos considerar o cosseno, por estar em uma dimensão.

- Então, num deslocamento de uma posição inicial x_0 até uma posição final x, o trabalho realizado foi

$$\boxed{W = \int_{x_0}^{x} F(x')\, dx'}$$

- onde usamos x' ou $\bar{x}$ para a variável de integração, para não confundi-la com o limite superior da integral x, que tem significados diferentes.

Exemplos

- Determine o trabalho realizado pela força $F(x) = 3x^2 - x^5$ num deslocamento da posição inicial para 20m à direita da origem.

- Determine o trabalho realizado pela força de van der Waals:

$$F(x) = \frac{c_1}{x^{12}} - \frac{c_2}{x^6}$$

- num deslocamento de 1m até uma posição x qualquer.

- Calcule o trabalho realizado pela força $F(x) = kx\, e^{-x/\xi}$, sendo k e ξ constantes, de uma posição qualquer x_0 para uma posição final x.

Dicas para os exemplos anteriores

- O primeiro e o segundo exercícios utilizam como técnica de integração, na verdade, a integral "imediata" abaixo:

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad \text{se} \qquad n \neq -1.$$

- O terceiro exemplo exige uma integração por partes, uma vez que derivar o termo x é vantajoso e enxergar a exponencial como uma derivada também, logo, podemos tomar $u = e^{-x/x_0}$ e $d\mathrm{v} = x\,dx$, para aplicar:

$$\int_{x_0}^{x} u \, d\mathrm{v} = u\mathrm{v}\Big|_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} \mathrm{v} \, du$$

Exemplo

- Determine o trabalho realizado pela força $F(x) = F_0 e^{-x^2/x_0^2}$ num deslocamento da posição $x = -1{,}5m$ para a posição $x = 2{,}3m$, sendo $F_0 = 4{,}000N$ e $x_0 = 1{,}378m$.

- A função e^{-x^2} não pode ser primitivada usando as técnicas analíticas do cálculo, para obter uma função elementar.

- Uma solução numérica deve ser buscada. Vamos resolver numericamente usando o software Wolfram Mathematica.
- Inserindo o comando

```
x0 = 1.378; F0 = 4; Integrate[F0 Exp[-x²/x0²],{x,-1.5,2.3}]
```

- obtemos

$$W \simeq 9{,}07633.$$

7.4. Movimento Sujeito a uma Força Elástica

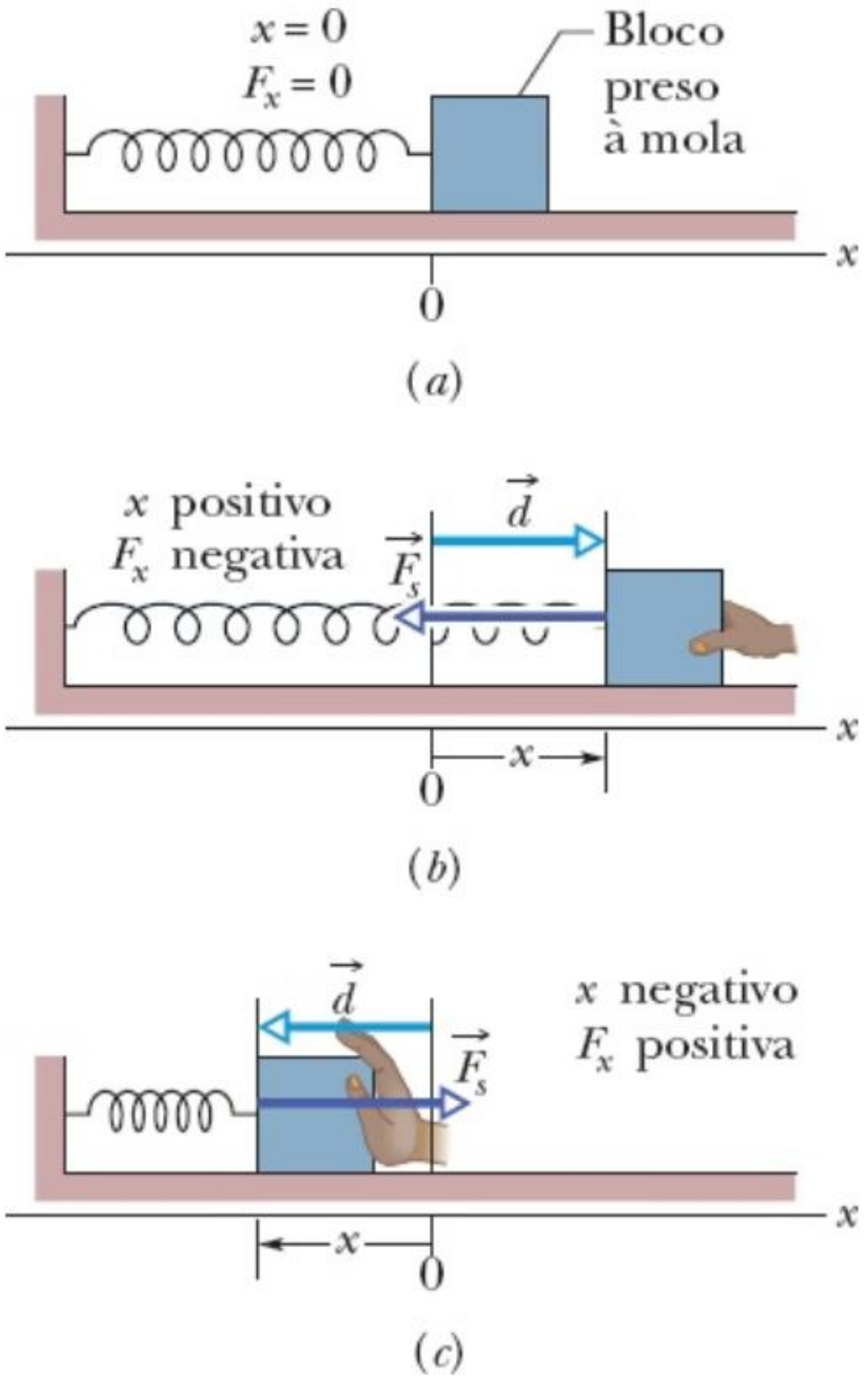
- Uma oscilação é um movimento no qual uma partícula passa pela mesma posição, “indo e voltando.”

- Um exemplo que ilustra a situação é o do bloco preso a uma mola.

- A força elástica que atua sobre o bloco vale:

$$\boxed{F_e = -kx}$$

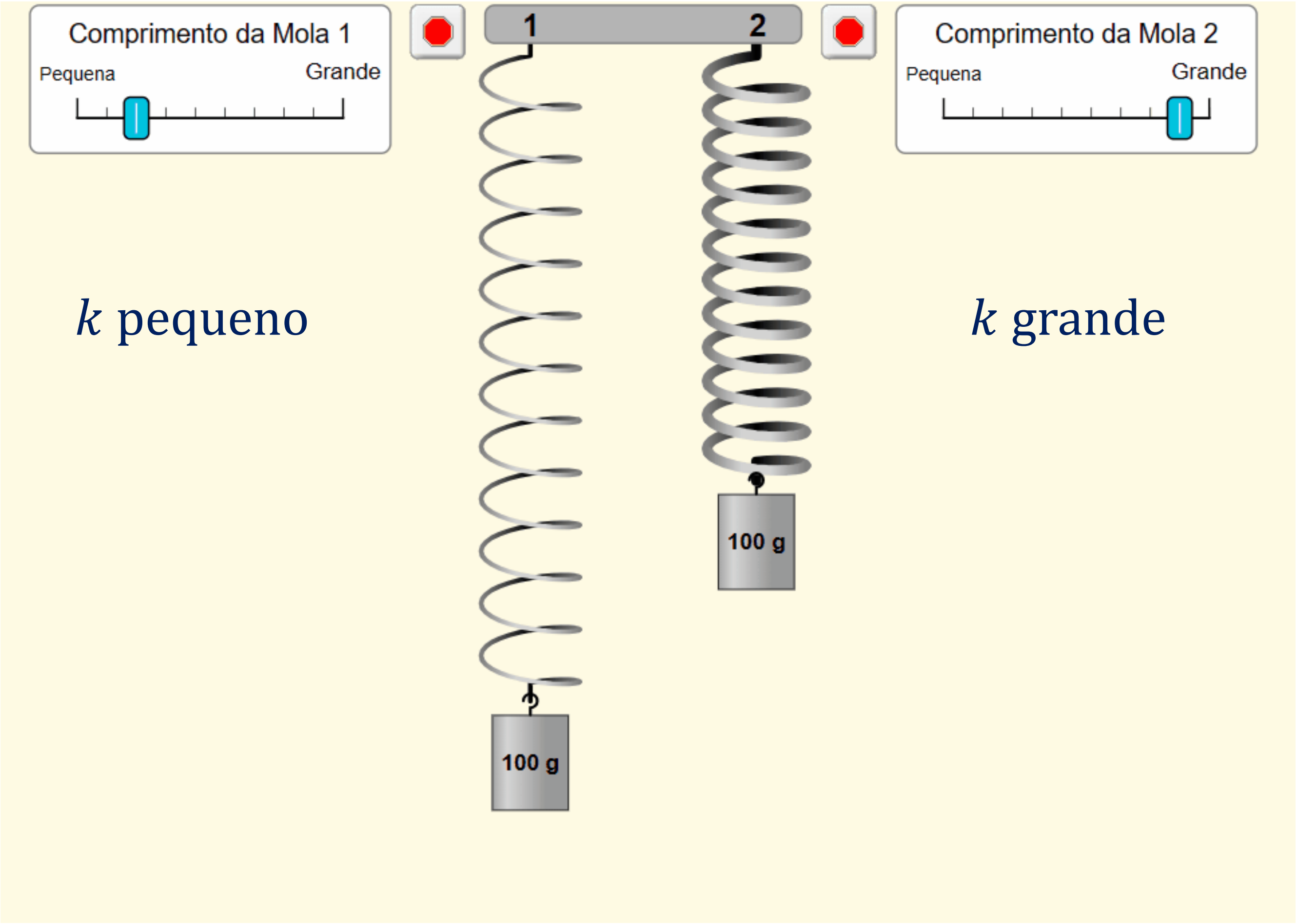
Esta expressão é conhecida como Lei de Hooke



A constante *k*

- A constante k, chamada *constante elástica da mola,* é o que informa se a mola irá puxar o bloco mais intensamente ou não, de acordo com distensão da mola x.

- Como k=|F|/|x|, uma constante maior significa que uma força maior é necessária para esticar um mesmo valor x, ou, dito de outra forma, é tanto mais difícil esticar uma mola quanto maior for k.



k pequeno

k grande

- Esta força é chamada **força restauradora** ou **força elástica**, pois ela sempre puxa a partícula de volta para a posição de equilíbrio.

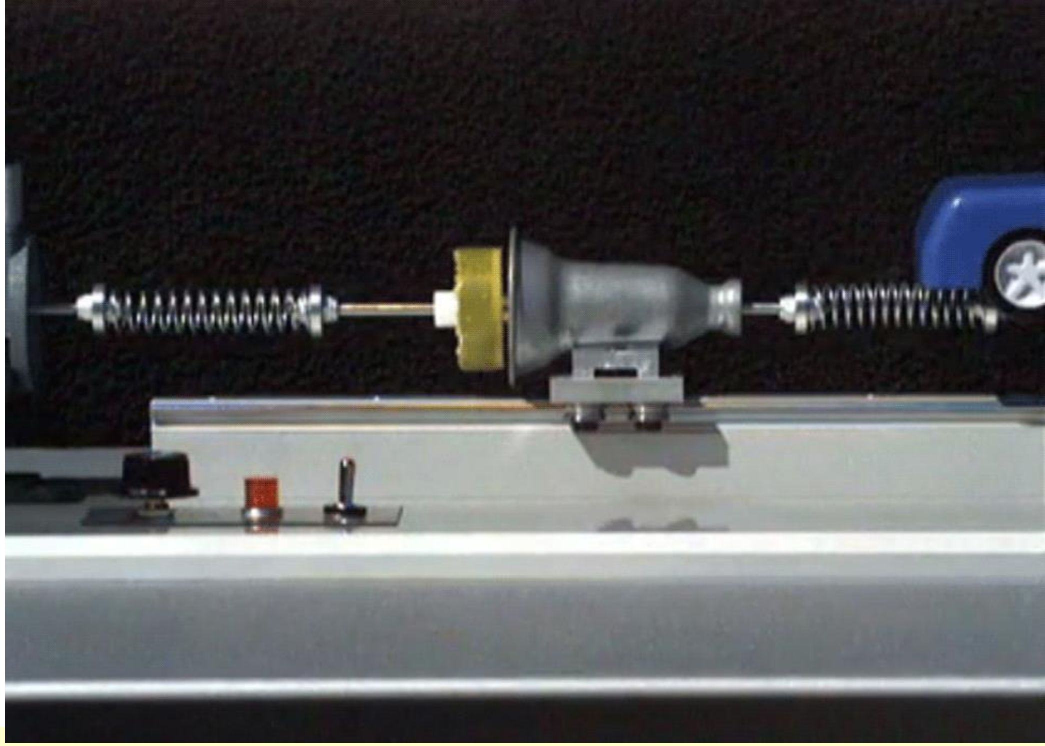
- É também chamada **Lei de Hooke**, em homenagem a Robert Hooke (1635–1703), cientista inglês contemporâneo de Newton.

- Ela não é a única forma de descrever uma oscilação, mas é sempre uma primeira aproximação para **qualquer oscilação**.

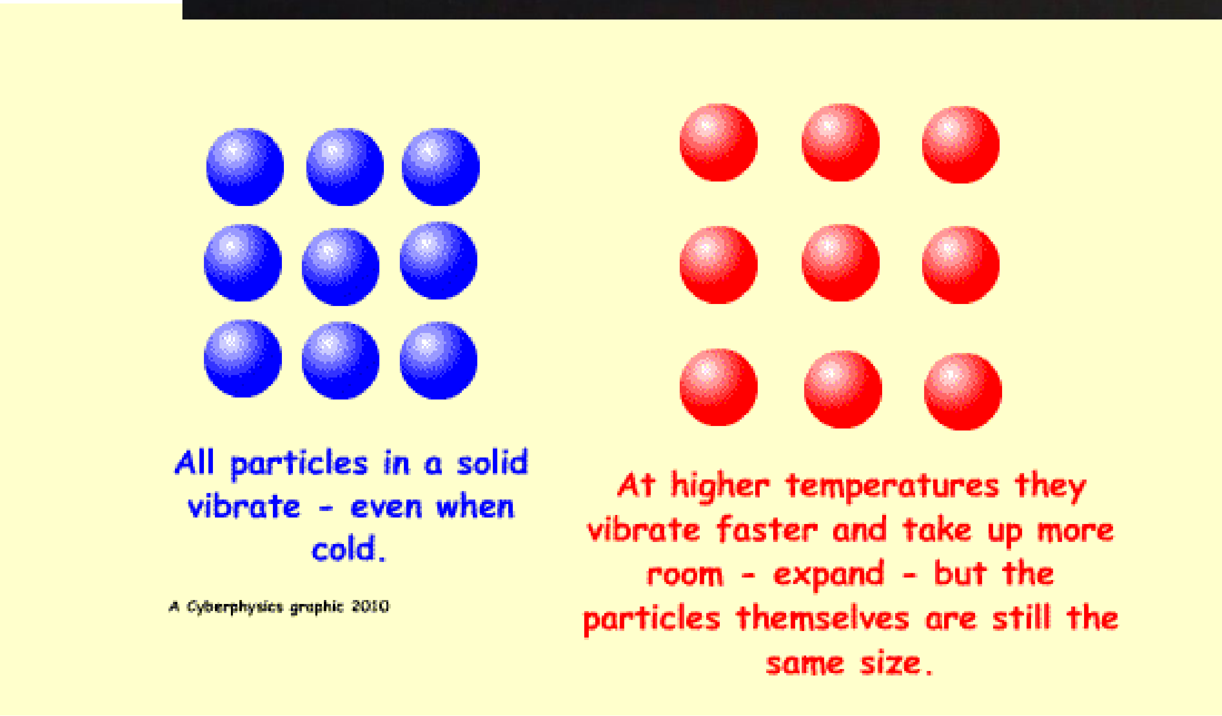
- Para o exemplo da mola, veja a **animação interativa** abaixo:

https://phet.colorado.edu/sims/html/masses-and-springs-basics/latest/masses-and-springs-basics_all.html?locale=pt_BR

As ondas são fenômenos oscilatórios



As molas amortecem através de uma oscilação



A temperatura em um sólido é caracterizada pela vibração das partículas

3.2. O Movimento Harmônico Simples (MHS)

- Uma partícula sujeita exclusivamente a uma força restauradora experimenta o chamado **movimento harmônico simples**.

- Vamos considerar o **exemplo** da mola, sendo m a massa do bloco e x sua posição, sendo k a constante da mola.

- Pela segunda lei de Newton, a força resultante F é igual a F_e. Então:

$$m\ddot{x} = -kx$$

- onde $\ddot{x}$ representa a **segunda derivada** de x em relação ao tempo.

Solução da Equação Diferencial

- Podemos reescrever a equação anterior da seguinte forma:

$$\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0}$$

Equação diferencial que descreve o movimento Harmônico Simples (M.H.S.)

- onde

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

- Esta grandeza é chamada frequência angular.

A função posição no MHS

- A equação diferencial anterior pode ser resolvida, conduzindo à solução abaixo:*

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

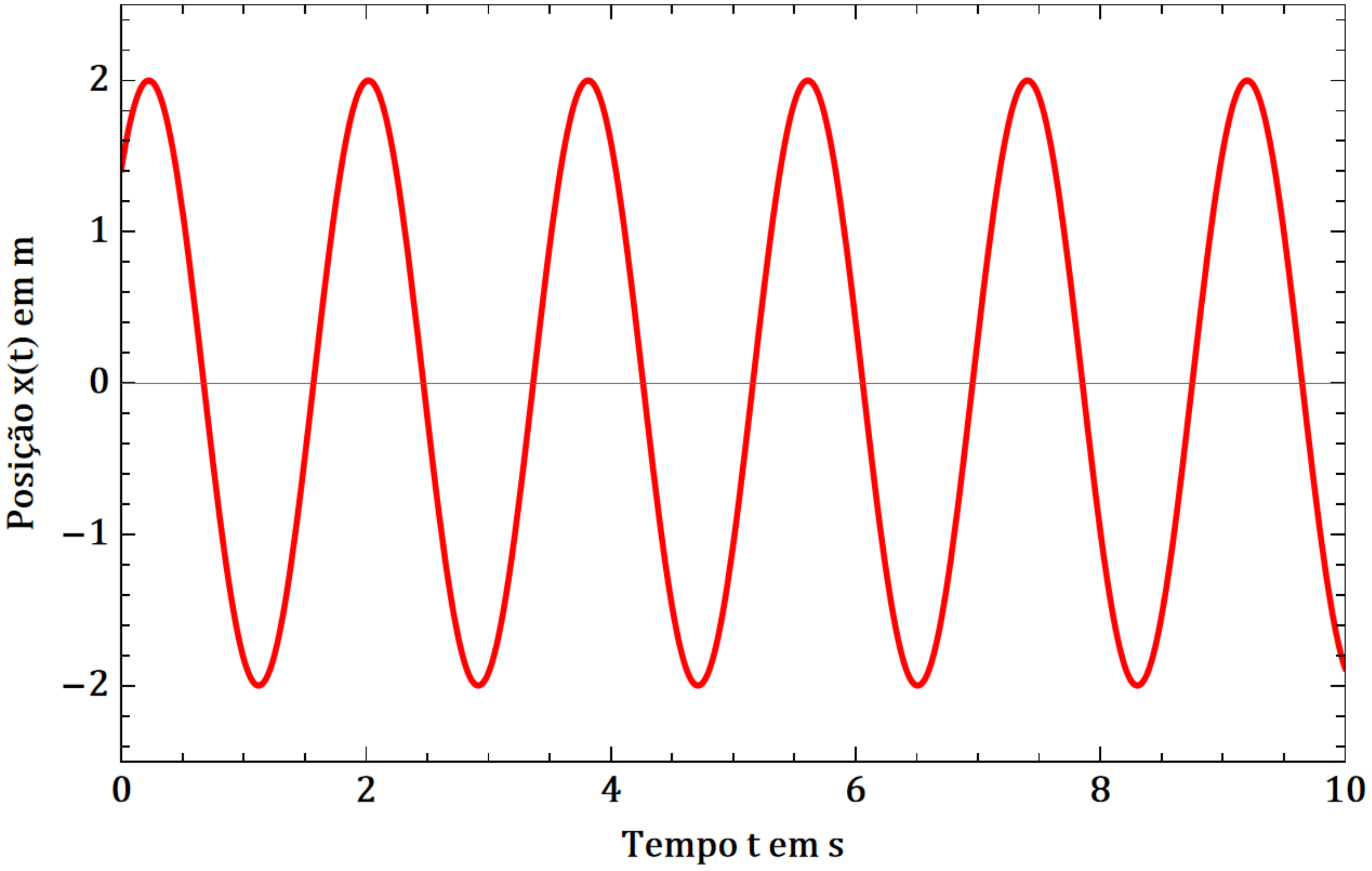
- O argumento do cosseno $\omega t + \phi$ é chamado fase da oscilação. A grandeza A é chamada amplitude (unidade: m) e a grandeza ϕ é chamada constante de fase (medida em radianos).

---

*O estudo de soluções de equações diferenciais é geralmente feito numa disciplina que leva o mesmo nome. Em nossa grade curricular, pertence à disciplina Cálculo III, do terceiro período. O estudo das oscilações pertence à Física Básica II e um aprofundamento é feito em Mecânica Clássica I.

Gráfico da Função Posição (Exemplo)

- No exemplo abaixo, a amplitude vale 2m, a frequência angular vale 3,5 rad/s e a constante de fase vale $\pi/4$ rad.



Exemplo

- Uma partícula se move sob a ação de uma força elástica de constante $k = 40N/m$.

a) Calcule a força necessária para deslocar a partícula 10cm da posição de equilíbrio.

b) Se a força aplicada for de 100N, qual será o deslocamento, em cm?

- Uma partícula se move sob a ação de uma força elástica de constante $k = 630N/m$.

a) Calcule a força necessária para deslocar a partícula 58cm da posição de equilíbrio.

b) Se a força aplicada for de 1260N, qual será o deslocamento, em cm?

Exemplo

- Um experimento foi realizado no laboratório com um dinamômetro (equipamento usado para medir força) e uma mola. Utilizando uma régua para medir o deslocamento a partir da posição de equilíbrio, foi montada a seguinte tabela com valores de força e deslocamento:

Força (N)	Deslocamento (m)	Constante da Mola (N/m)
20	0,39	
22	0,45	
24	0,48	
26	0,51	
28	0,61	
30	0,63	
32	0,66	

- A partir dos dados, preencha os valores experimentais de k e calcule sua média para determinar a constante elástica da mola.

Exemplo

- Esboce o gráfico da função posição para os MHS que possui uma amplitude de 6m, frequência de 0,23 rad/s e uma constante de fase igual a 2,52 rad.

Exercício

- Esboce o gráfico da função posição para os MHS que possui Uma amplitude de 45mm, frequência de $\frac{3\pi}{4}$ rad/s e uma constante de fase igual a $-0{,}9$ rad.

7.5. Trabalho Realizado pela Força Elástica

- Como vimos, o trabalho é determinado como a integral da força em relação ao deslocamento.

- Então, se uma partícula está sujeita a uma força restauradora $F(x) = -kx$ em uma dimensão, podemos calcular o trabalho realizado por esta força de uma posição inicial x_0 até uma posição final x, o que resulta:

$$W = \int_{x_0}^{x} F(x)\ dx = \int_{x_0}^{x} -kx\ dx = -\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}kx_0^2$$

- Quando for preciso, portanto, calcular este trabalho, podemos consultar esta expressão, não sendo necessário deduzi-la novamente.
- Note que, quando F varia, o trabalho não é simplesmente F vezes Δx.

Exemplo

. Uma mola possui uma constante elástica de 15,0 N/cm. (*a*) Qual é o trabalho necessário para estender a mola de 7,60 mm desde a sua posição relaxada? (*b*) Qual é o trabalho necessário para estender a mola de um valor adicional de 7,60 mm?

Exercício

27 **F** Uma mola e um bloco são montados como na Fig. 7.4.1. Quando o bloco é puxado para o ponto $x = +4{,}0$ cm, devemos aplicar uma força de 360 N para mantê-lo nessa posição. Puxamos o bloco para o ponto $x = 11$ cm e o liberamos. Qual é o trabalho realizado pela mola sobre o bloco quando este se desloca de $x_i = +5{,}0$ cm para (a) $x = +3{,}0$ cm, (b) $x = -3{,}0$ cm, (c) $x = -5{,}0$ cm e (d) $x = -9{,}0$ cm?

7.6. Trabalho Realizado pela Força Gravitacional

- Vamos considerar uma partícula de massa pequena m interagindo com o campo gravitacional gerado por um corpo celeste de grande massa, dada por M.

- Vamos separar em dois casos:

I. Quando a partícula está próxima à superfície do corpo celeste, de massa M (pense na Terra ou na Lua, por exemplo), a aceleração da gravidade é aproximadamente constante, de modo que a força da gravidade é aproximadamente constante, correspondendo ao peso da partícula:

$$F_g = mg = \text{constante}$$

7.6. Trabalho Realizado pela Força Gravitacional

- No caso I, portanto, o trabalho vale peso vezes deslocamento (neste caso, representamos o deslocamento por h, significando uma altura):

$$W = mgh\,.$$

- Note que existe uma convenção de sinal: Quando o objeto cai, o trabalho realizado pela força peso é positivo, pois a força tem o mesmo sentido do deslocamento (ambas para baixo), o que está de acordo com a definição de trabalho.
- Quando o objeto sobe, o trabalho deve ser negativo.

- Então, este valor h na expressão $W = mgh$ **é medido de cima para baixo**.

7.6. Trabalho Realizado pela Força Gravitacional

II. Quando a partícula está distante , devemos considerar a expressão mais geral da força gravitacional, dada por:

$$F(r) = -\frac{GMm}{r^2}$$

- onde: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{kg}^2$ é a chamada constante gravitacional ou constante newtoniana, que é a constante da natureza que caracteriza a gravitação, aparecendo inclusive na gravitação relativística e nas teorias alternativas da gravitação.
- Mm é o produto das massas, o que significa que a força gravitacional é proporcional a ambas as massas, tanto da partícula quanto do corpo celeste.
- Note que $F \sim 1/r^2$, onde r é a distância entre os centros de massa dos dois corpos: a partícula e o corpo celeste. A expressão $F \sim 1/r^2$ é a chamada lei do inverso do quadrado e se aplica em muitas situações, especialmente quando há uma interação que se propaga no espaço com simetria esférica. Outros exemplos que obedecem tal lei: a força eletrostática, a intensidade das ondas, como o som e a luz.

Exemplos

Obs.: Antes de resolver, verifique se a partícula está próximo à superfície ou não, para decidir entre os Casos I e II.

1. Calcule o trabalho realizado pela gravidade da Terra para fazer uma pedra de 958kg cair de uma altura de 374m de altura.
2. Calcule o trabalho realizado pela gravidade do sol para fazer a Terra completar uma órbita circular ao redor dele.
3. Calcule o trabalho necessário para a Lua puxar um asteroide de 60 toneladas distante de 1300 km da sua superfície.
4. Calcule o trabalho que uma máquina transportadora de supermercado deve realizar para fazer um carregamento de 300kg de arroz subir para uma prateleira a 4m do chão.
5. No filme "O todo poderoso," a personagem Bruce utiliza "poderes divinos" para aproximar a Lua da Terra. Suponha que isso tenha sido realizado através da força da gravidade entre os planetas. Qual seria o trabalho realizado pela Terra para deixar a Lua a uma distância igual à metade da atual, de 384.400 km?

Dados: $g = 9{,}81 m/s^2$, $\mathrm{M}_{\mathrm{Terra}} = 5{,}97 \times 10^{24}\mathrm{kg}$, $M_{Lua} = 7{,}36 \times 10^{22}\mathrm{kg}$

7.6. Trabalho Realizado pela Força Gravitacional

- Aplicando na integral, podemos calcular o trabalho para sair de uma distância inicial r_0 para uma distância r:

$$W = \int_{r_0}^{r} F(r)\, dr = \int_{r_0}^{r} -\frac{GMm}{r^2} dr = GMm \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2} = GMm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

- Assim:

$$\boxed{W_{r_0 \to r} = \frac{GMm}{r} - \frac{GMm}{r_0}}$$

- representa o trabalho referido.

7.7. O Conceito de Energia Cinética

- Associada a uma partícula de massa m em movimento, com velocidade v, está a energia cinética da partícula, definida como:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m \mathrm{v}^2}$$

- Substituindo as unidades do SI de massa e velocidade, obtemos justamente $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$, o que justifica ter definido anteriormente esta unidade como a unidade SI de energia, chamada joule (J).

- Livros como o de D. Hallyday et al. utilizam K para representar a energia cinética. Vamos representar por T para ficar de acordo com os livros mais utilizados de mecânica clássica e com o livro de física básica de H.M. Nussenzveig, além de ser a convenção mais comum em física.

Exemplos

1. Uma partícula de 100g está a uma velocidade de 100m/s. Calcule a sua energia cinética.

2. Uma partícula está girando ao redor de um ponto a 20 rad/s, sendo o raio de 3cm. Determine sua massa, sabendo que sua energia cinética é de 3000J.

3. Desprezando efeitos relativísticos, com que porcentagem da velocidade da luz uma partícula da ordem de grandeza de um elétron, de 10^{-31}kg, deveria estar para ter uma energia de $5{,}76 \times 10^{-15} J$?

7.8. O Teorema Trabalho-Energia Cinética

- A definição dada antes de energia cinética é um tanto intrigante.

- Justificamos o porquê do trabalho ser definido como é, mas faltou justificar porque a energia cinética é da forma que é.

- O fato de T ser função de v é claro, pois é uma energia de movimento. Mas porque o v ao quadrado?

- E porque o fator 1/2?

- O fato é que a energia cinética é definida assim por causa da sua relação com o trabalho, que veremos a seguir.

7.8. O Teorema Trabalho-Energia Cinética

- **Teorema Trabalho-Energia Cinética:**

- Se uma partícula de massa m se move sob a ação de uma força F que realiza trabalho sobre a partícula, então o trabalho realizado W num intervalo de tempo $\Delta t = t - t_0$ é igual à variação da energia cinética da partícula neste mesmo intervalo, ou seja:

$$\boxed{W = \Delta T \ ,}$$

- Em outras palavras:

$$\boxed{W = \int_{x_0}^{x} F(x')\, dx' = \frac{1}{2} m\mathrm{v}^2 - \frac{1}{2} m\mathrm{v}_0^2}$$

Demonstração do Teorema

- Partimos da definição de Trabalho que foi dada anteriormente, $W = \int_{x_0}^{x} F(x')\, dx'$.
- Aplicando a segunda lei de Newton, lembramos que, para o caso do Teorema, que é o de uma partícula de massa m,

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(m\mathrm{v})}{dt} = m\frac{d\mathrm{v}}{dt}$$

- E fazemos a mudança de variável na integral, de x' para $\mathrm{v} = dx'/dt$, de onde se conclui que $dx' = \mathrm{v}\, dt$, o que permite reescrever o trabalho como:

$$W = \int_{x_0}^{x} F(x')\, dx' = \int_{t_0}^{t} m\frac{d\mathrm{v}}{dt}\,\mathrm{v}\, dt$$

Demonstração do Teorema

- Daí, notando que

$$\frac{d(\mathrm{v}^2)}{dt} = 2\mathrm{v}\frac{d\mathrm{v}}{dt} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{v}\frac{d\mathrm{v}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d(\mathrm{v}^2)}{dt}$$

- podemos substituir isso na integral anterior, obtendo:

$$W = \int_{t_0}^{t} m\frac{d\mathrm{v}}{dt}\,\mathrm{v}\,dt = \int_{t_0}^{t} m\frac{1}{2}\frac{d(\mathrm{v}^2)}{dt}dt = \frac{1}{2}m\int_{\mathrm{v}_0^2}^{\mathrm{v}^2} d(\mathrm{v}^2) = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 - \frac{1}{2}m\mathrm{v}_0^2$$

- Portanto:

$$W = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 - \frac{1}{2}m\mathrm{v}_0^2 = T - T_0 = \Delta T \ .$$

Exemplo

Uma força age sobre uma partícula de 2,80 kg de modo que a posição da partícula como uma função do tempo é dada por $x = (3{,}0\ \text{m/s})t - (4{,}0\ \text{m/s}^2)t^2 + (1{,}0\ \text{m/s}^3)t^3$. (*a*) Determine o trabalho realizado pela força durante os primeiros 4,0 s. (*b*) Qual é a taxa instantânea com a qual a força realiza trabalho sobre a partícula no instante $t = 3{,}0$ s?

Exercício

Uma partícula se move segundo a equação (no S.I.)

$$x(t) = 2t^3 + 7t^2 + 5\,.$$

a. Calcule a sua energia cinética em $t = 2s$, sabendo que a sua massa é $m = 3kg$.

b. Calcule o trabalho realizado pela força resultante de $t = -2s$ até $t = 2s$.