Universidade Federal do Pará

Instituto de Ciências Exatas e Naturais

Faculdade de Física

Os Conceitos de Base e Dimensão de um Espaço Vetorial

Prof. Isaac Torres

https://itsufpa.wixsite.com/prof-isaac-torres

Parte I

Conjunto Gerador de um Espaço Vetorial

Expressando um vetor como combinação linear de outros vetores

- Os conceitos de espaço vetorial e combinação linear suscitam algumas perguntas:

- É possível sempre expressar um vetor “complicado” como combinação linear de outros vetores mais “simples,” mais “básicos”?

- Se sim, como?

- É possível determinar um *conjunto de vetores básicos*, em quantidade menor possível, ...

- ... de forma que *todos os vetores do espaço sejam combinações lineares* desses vetores mais “simples,” mais “básicos”?

Vamos ao Plano $\mathbb{R}^2$

- No plano $\mathbb{R}^2$, vimos que todo vetor $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ pode ser expresso na forma

$$\vec{u} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath}$$

- Observe que isso é uma **combinação linear**.

- Ou seja, *todo vetor pode ser expresso como combinação linear dos vetores do conjunto*

$$\mathcal{B} = \{\hat{\imath}\,,\hat{\jmath}\}$$

- Dizemos então que **o conjunto $\mathcal{B} = \{\hat{\imath}\,,\hat{\jmath}\}$ gera o espaço $\mathbb{R}^2$** ou que **$\mathcal{B} = \{\hat{\imath}\,,\hat{\jmath}\}$ é um conjunto de geradores do espaço $\mathbb{R}^2$**.

Algo Semelhante Ocorre no Espaço $\mathbb{R}^3$

- No espaço $\mathbb{R}^3$, vimos que todo vetor $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ pode ser expresso na forma

$$\vec{u} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$$

- Observe que isso é uma **combinação linear**.

- Ou seja, ***todo vetor pode ser expresso como combinação linear dos vetores do conjunto***

$$\mathcal{B} = \{\hat{\imath}\,,\hat{\jmath}\,,\hat{k}\}$$

- Dizemos então que **o conjunto $\boldsymbol{\mathcal{B}} = \{\hat{\boldsymbol{\imath}}\,,\hat{\boldsymbol{\jmath}}\,,\hat{\boldsymbol{k}}\}$ gera o espaço $\mathbb{R}^3$** ou que **$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \{\hat{\boldsymbol{\imath}}\,,\hat{\boldsymbol{\jmath}}\,,\hat{\boldsymbol{k}}\}$ é um conjunto de geradores do espaço $\mathbb{R}^3$**.

Geradores do Espaço $M(2\times 3)$

- No espaço das matrizes $M(2\times 3)$, de duas linhas e três colunas, temos o conjunto:

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

- **que gera $M(2\times 3)$**, ou seja, toda matriz de duas linhas e três colunas pode ser expressa como combinação linear das 6 matrizes do conjunto $\mathcal{B}$.

- Exemplo:

$$\begin{pmatrix}5 & -8 & \pi\\ -e & 0 & 4\end{pmatrix} = 5\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} - 8\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} + \pi\cdot\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} - e\cdot\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} + \\ +0\cdot\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} + 4\cdot\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

E o espaço de Funções $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

- Este espaço é "grande demais" para ter um conjunto finito de geradores.

- Vamos considerar apenas uma parte dele, o espaço das funções polinomiais de grau menor do que ou igual a 3, como exemplo.

- Ou seja, vamos considerar o espaço

$$P_3 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,;\;\; f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \;\text{ onde }\; a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

- que é um subespaço de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, ou seja, um subconjunto que ainda é um espaço vetorial.

Geradores do Espaço P_3

- **Exemplo 3.** No espaço P_3 das funções polinomiais de grau menor do que ou igual a 3, considere as funções definidas pelas expressões abaixo, vistas num exemplo anterior:

$$f_0(x) = 1 \quad , \quad f_1(x) = x \quad , \quad f_2(x) = x^2 \quad , \quad f_3(x) = x^3$$

- Então, o conjunto

$$\mathcal{B} = \{f_0 \, , f_1 \, , f_2 \, , f_3\}$$

- **é um conjunto de geradores de $\boldsymbol{P_3}$**, ou seja, todo polinômio de grau menor do que ou igual a 3 pode ser escrito como combinação linear das quatro funções $f_0 \, , f_1 \, , f_2 \, , f_3$.

Revisitando o Exemplo 1

- No espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, consideramos os vetores abaixo

$$\vec{u} = \hat{\imath} + 3\hat{\jmath} \qquad \text{e} \qquad \vec{\mathrm{v}} = 4\hat{\imath} + \hat{\jmath}$$

- e todos os testes do exemplo puderam ser escritos como combinação destes dois vetores.

- Isso é suficiente para concluir que $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{\mathrm{v}}\}$ gera o espaço $\mathbb{R}^2$?

- Então, como podemos concluir (ou não) que $\mathcal{B}$ gera $\mathbb{R}^2$?

- É necessário tomar um vetor genérico $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ e verificar se este vetor genérico pode ser escrito como combinação linear dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{\mathrm{v}}$.

Revisitando o Exemplo 2

- No espaço vetorial $M(2 \times 2)$, verificamos que existem matrizes que podem e matrizes que não podem ser escritas como combinações lineares das matrizes abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Isso significa que essas matrizes **não geram o espaço das matrizes $M(2 \times 2)$**.

- Você consegue pensar em um conjunto de geradores mais simples possível para $M(2 \times 2)$?

- Quantos elementos este conjunto deve ter?

- Consegue pensar em outro diferente deste?

Revisitando o Exemplo 3

- No espaço das funções P_3, vimos que as funções abaixo:

$$f_1(x) = -5x \quad , \quad f_2(x) = 2x^2 + 10 \quad \text{e} \quad f_3(x) = -2 + x^3$$

- **não geram o espaço $\boldsymbol{P_3}$**, pois, por exemplo, o polinômio de grau 3

$$f(x) = 14 - 15x + 2x^2 - 2x^3$$

- é uma combinação linear dos elementos de $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$, mas o polinômio

$$g(x) = -1 - 2x^3$$

- por exemplo, não pode ser escrito como combinação linear dos elementos de $\mathcal{B}$.

Exercício

- Podemos completar o conjunto

$$f_1(x) = -5x \quad , \quad f_2(x) = 2x^2 + 10 \quad \text{e} \quad f_3(x) = -2 + x^3$$

- com a função $f_0(x) = 3$, por exemplo, de modo que $\mathcal{B} = \{f_0\ , f_1, f_2, f_3\}$ passe a ser um gerador de P_3.

- Mostre que isso é verdade.

Parte II

Base e Dimensão

Dependência Linear

- Para a discussão abaixo, pense no espaço vetorial V como sendo um dos exemplos que estudamos: $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $M(m \times n)$, $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ou P_3 e pense nos vetores abaixo como os elementos desses espaços.

- Considere um espaço vetorial arbitrário V e um conjunto finito de elementos de V:

$$X = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$$

- Quando qualquer um dos elementos desse conjunto puder ser escrito como combinação linear dos demais, damos um nome especial a esse conjunto.

- Dizemos que $X = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ é **linearmente dependente**.

Dependência Linear

- **Exemplo 1.** em $\mathbb{R}^2$, o conjunto

$$X = \{\hat{\imath}\,, \hat{\jmath}\,, 2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}\}$$

- é linearmente dependente, pois $2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$, do mesmo conjunto X.

- Exemplo 2. O conjunto Y de matrizes em $M(2 \times 2)$ abaixo é linearmente dependente:

$$Y = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -10 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

- Como verificar isso da forma mais simples possível?

Vetores Linearmente Independentes (l.i.)

- Um conjunto de vetores num espaço V

$$X = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$$

- é chamado **linearmente independente** quando nenhum dos vetores de $X \subset V$ puder ser escrito como combinação linear dos demais.

Exemplos em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

- **Exemplo 1.** Em $\mathbb{R}^2$, são l.i. os conjuntos abaixo:

- $X = \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}$
- $Y = \{\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}, 4\hat{\imath} + \hat{\jmath}\}$
- $Z = \{\hat{\imath} + \hat{\jmath}, -\hat{\imath} + \hat{\jmath}\}$

- **Exemplo 1.** Em $\mathbb{R}^3$, são l.i. os conjuntos abaixo:

- $X = \{\hat{\imath}\,, \hat{\jmath}\,, \hat{k}\}$
- $Y = \left\{2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}, 4\hat{\imath} - \hat{k}, 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}\right\}$

Critério para determinar se um conjunto é l.d.

- No caso mais geral, em um espaço vetorial V, um conjunto

$$X = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$$

- será:

- **Linearmente dependente** quando a igualdade

$$c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_nu_n = 0$$

- implicar que pelo menos um dos c_i é diferente de zero.

- **Linearmente independente** quando a mesma igualdade implicar que todos os c_i são iguais a zero.

Exercícios

- Aplique este critério aos exemplos anteriores para mostrar se os conjuntos são l.d. ou l.i.

Quais dos seguintes conjuntos de vetores em R^3 são linearmente dependentes?

(a) $(4, -1, 2), (-4, 10, 2)$

(b) $(-3, 0, 4), (5, -1, 2), (1, 1, 3)$

(c) $(8, -1, 3), (4, 0, 1)$

(d) $(-2, 0, 1), (3, 2, 5), (6, -1, 1), (7, 0, -2)$

O Conceito de Base

- Uma base para um espaço vetorial V é um conjunto $\mathcal{B} \subset V$ que satisfaz dois critérios:

i. $\mathcal{B}$ gera o espaço V

ii. $\mathcal{B}$ é linearmente independente

- Isso significa que uma base é um **ponto de partida**, um conjunto que permite *construir todos os vetores do espaço como cominações dele*.

- E, por ser linearmente independente, ele tem o **número mínimo necessário** de vetores com essa propriedade, *não contendo vetores desnecessários*.

Exemplos

- Em $\mathbb{R}^2$, a base mais usada é $\{\hat{\imath}\,,\hat{\jmath}\}$

- Em $\mathbb{R}^3$, a base mais usada é $\{\hat{\imath}\,,\hat{\jmath}\,,\hat{k}\}$

- No espaço das matrizes $M(2\times 2)$, o conjunto abaixo é uma base

$$\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

- No espaço das funções polinomiais de grau ≤ 3, o espaço P_3, é base:

$$\mathcal{B}=\{f_0,f_1,f_2,f_3\}$$

- onde $f_0(x)=1$, $f_1(x)=x$, $f_2(x)=x^2$, $f_3(x)=x^3$.

O conceito de Dimensão do Espaço

- A dimensão é o número de elementos de uma base do espaço.

- Se uma base do espaço tem n elementos, toda base terá o mesmo número de elementos, o que define de forma única a dimensão do espaço.

- Escrevemos $\dim V = n$.

- Temos:

✓ $\dim \mathbb{R}^2 = 2$

✓ $\dim \mathbb{R}^3 = 2$

✓ $\dim M(m, n) = m \cdot n$

✓ $\dim P_3 = 4$

Espaços de Dimensão Infinita

- Quando nenhum conjunto finito gerar o espaço V, dizemos que ele tem dimensão infinita.

- Escrevemos $\dim V = \infty$

- Exemplo: o espaço das funções reais $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tem dimensão infinita.

- Para verificar o porquê, basta notar que ele possui todas as funções polinomiais de todos os graus possíveis.

- Espaços de dimensão infinita não são muito estudados em álgebra linear. Seu estudo é reservado para uma disciplina chamada análise funcional. Eles possuem inúmeras aplicações, especialmente no estudo das chamadas "equações diferenciais," e também nas teorias quânticas da física.

Referências

- Paulo Winterle. **Vetores e Geometria Analítica.** 2ª edição, Editora Pearson, 2014.
- É um livro de geometria analítica, não de álgebra linear. Porém, supõe-se que ao estudar álgebra linear se tem o conhecimento dos 4 primeiros capítulos desse livro, então é importante como um estudo inicial prévio.

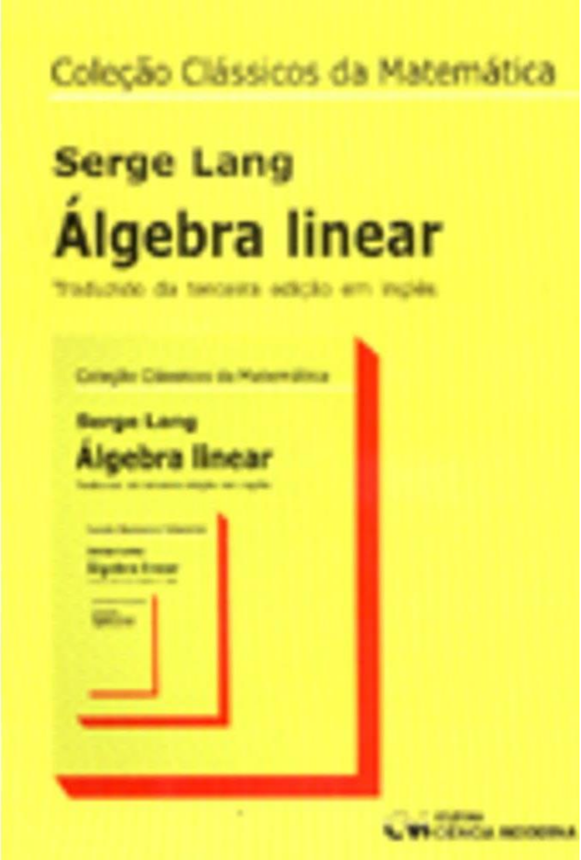
- Howard Anton, Chris Rorres. **Álgebra Linear com Aplicações.** 10ª edição, Editora Bookman, 2012.
- Tradução do inglês, mas é um excelente livro, com excelente didática que cobre a ementa de álgebra linear da ufpa.

- Carlos A. Callioli, Higino H. Domingues, Roberto C.F. Costa. **Álgebra Linear e Aplicações**, 6ª edição, Atual Editora.
- Referência em português bastante acessível e com vários exemplos, pode ser usada como livro-texto da disciplina.

Referências Avançadas

- Serge Lang. **Álgebra Linear**. Coleção Clássicos da Matemática. Editora Ciência Moderna.

- Este livro é consideravelmente mais avançado que os anteriores e não é recomendável para uma disciplina introdutória. Ele é mais "matemático," o que significa que se aprofunda mais em aspectos teóricos e em tópicos geralmente reservados a disciplinas de fim de graduação em matemática ou mestrado em matemática. Porém, possui muitos tópicos que podem ser úteis para Física. Os Capítulos V, VII e VIII são especialmente úteis para Mecânica Quântica. O prof. Serge Lang tem muitos livros de álgebra (não só linear), cálculo e análise, para quem tiver interesse. Infelizmente, poucos foram traduzidos para o português.



Referências Avançadas

- Elon Lages Lima, **Álgebra Linear**. Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2014.

- Este livro é uma referência completa em álgebra linear. Cobre não só o conteúdo de nossa disciplina, como também tópicos mais computacionais (decomposição de matrizes e outros, Capítulos 17 e 22), tópicos mais avançados que são muito úteis em Mecânica Quântica (Capítulos 11 e 21, respectivamente, sobre adjunta e espaços complexos). Ele não é adequado ao início de um curso de graduação, pois apresenta uma linguagem bastante compacta e abstrata. Apesar disso, é um excelente texto, tendo inclusive ganhado o prêmio Jabuti em 1996. Sendo assim, pode ser uma segunda ou terceira leitura ao(à) leitor(a) interessado(a) em se aprofundar no assunto, e adquirir um aprendizado mais sólido em matemática.