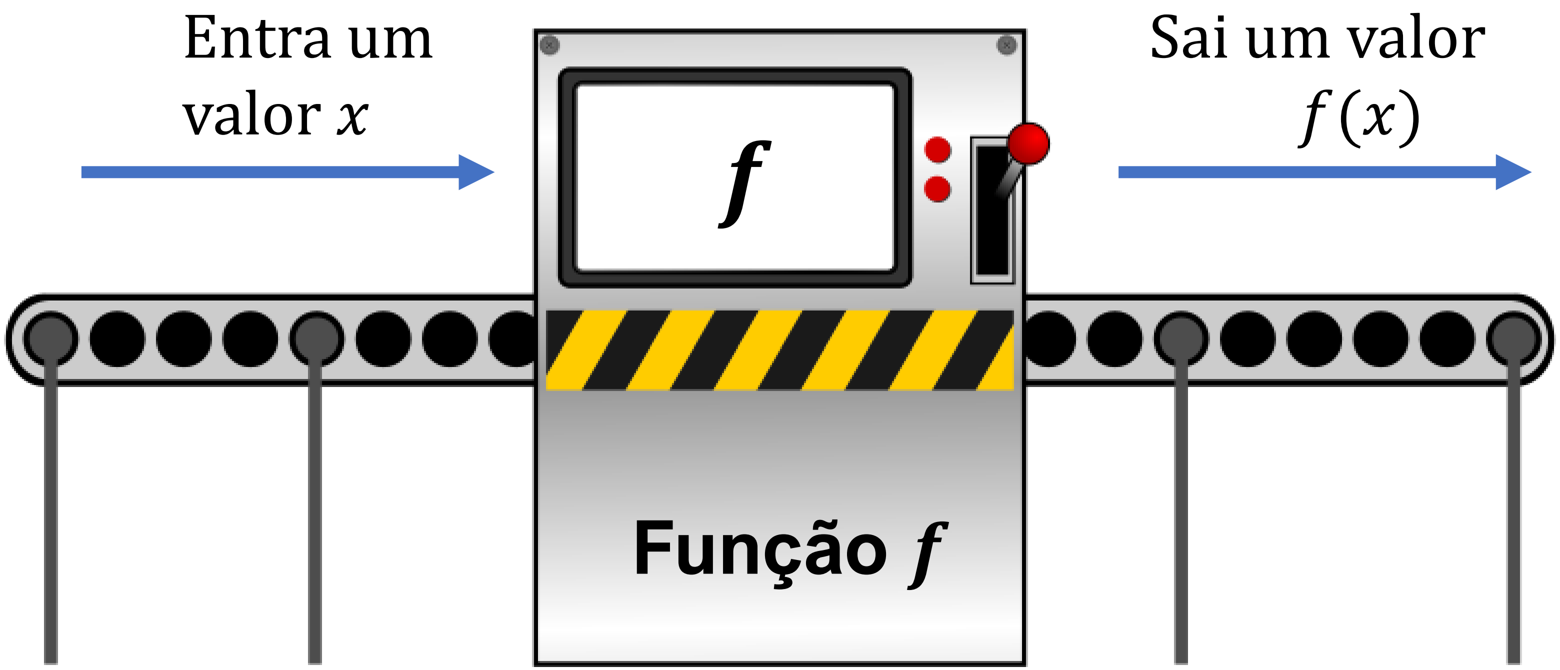
Universidade Federal do Pará
Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Faculdade de Física

Introdução ao Estudo das Funções

Prof. Isaac Torres
https://itsufpa.wixsite.com/prof-isaac-torres

O conceito de Função e suas notações

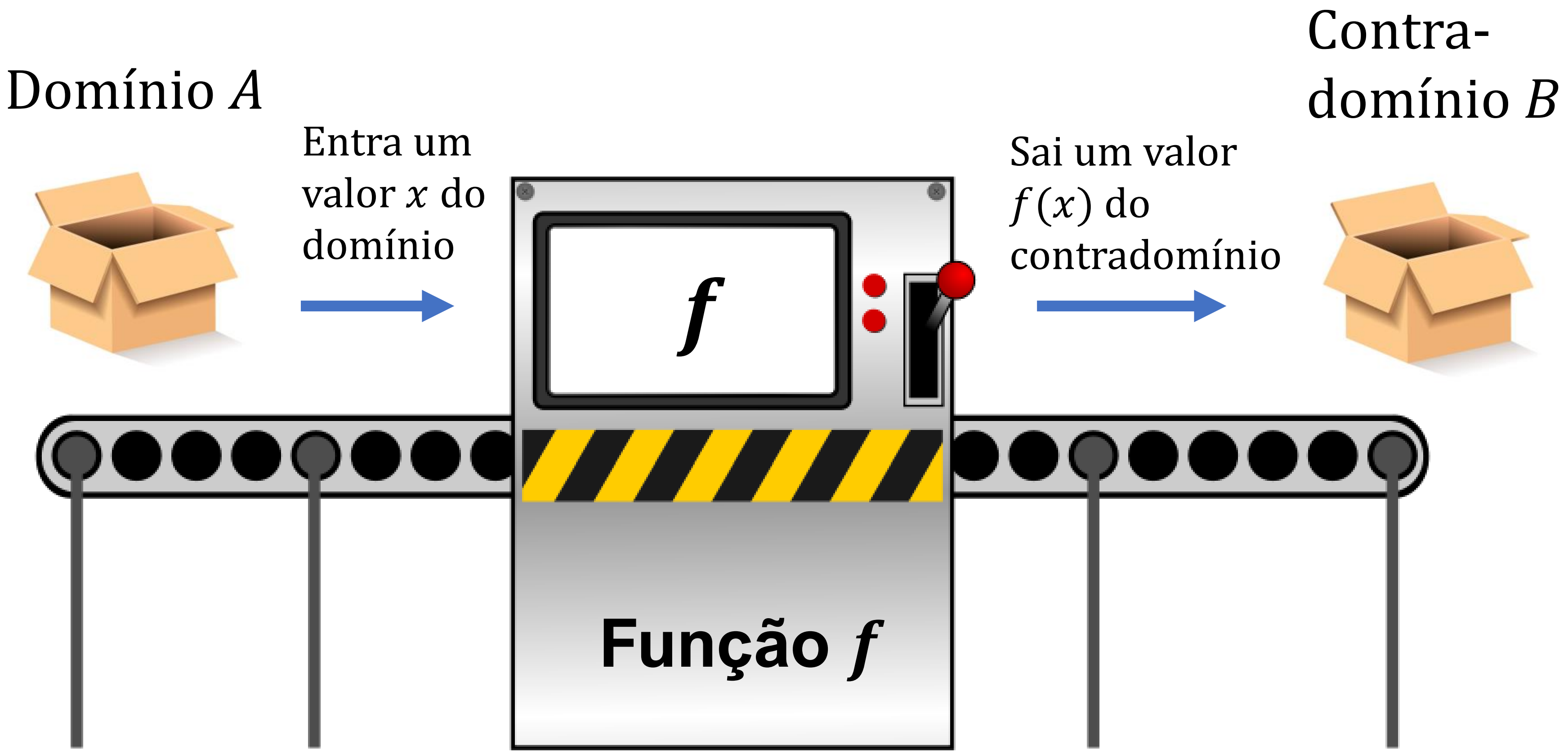
- Uma função é uma regra de **transformação**.
- Ela associa cada valor de entrada a um único valor de saída.



O conceito de Função e suas notações

- O conjunto de todos os valores de entrada possíveis é chamado **domínio**.

- O conjuntos de todos os valores de saída possíveis, sejam efetivamente atingidos ou não, é chamado de **contradomínio**.



A notação de uma Função

- Como a função é uma seta que leva elementos de um conjunto em outro, sua notação é:

$$f : A \longrightarrow B$$

- Onde:

1) A letra f representa a função como um todo
2) O conjunto A é o domínio, de onde “saem” os valores
3) O conjunto B é o contradomínio, onde “chegam” os valores

- O valor de um dado elemento $x \in A$ é representado por $f(x)$

Exemplo Mais Simples: a Função Constante

- A transformação mais simples associa qualquer valor a um valor fixo, ou seja, uma constante dada.

- **Exemplo a)** A função $f: [-3,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2$. Ou seja, ela associa a cada número real x do intervalo $[-3,3]$ o número 2.

- **Exemplo b)** A função $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = -\pi$. Ou seja, ela associa a cada número real x o número $-\pi$.

- **Exemplo c)** A função $h: \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x) = \frac{\sqrt{3}}{7} - 1$. Ela associa o número 1 ao número $\frac{\sqrt{3}}{7} - 1$.

A Função Identidade

- A função identidade, geralmente definida de um conjunto X nele mesmo, representada por id, é dada por

$$\begin{aligned} \mathrm{id}\colon X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

- Os exemplos irão alterar apenas o significado, mas a ideia é sempre a mesma. Só eventualmente alteraremos o domínio de acordo com o problema.

- **Exemplo a)** A função identidade da reta na reta $\mathrm{id}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

- **Exemplo b)** Podemos restringir o exemplo anterir a um dado intervalo, por exemplo: a função identidade $\mathrm{id}\colon]-1,3] \longrightarrow]-1,3]$.

Esboçando o Gráfico de uma Função

- O gráfico é um conjunto de pontos da forma

$$P = \big(x, f(x)\big)$$

- Ou seja, o conjunto de todos os pontos tais que:

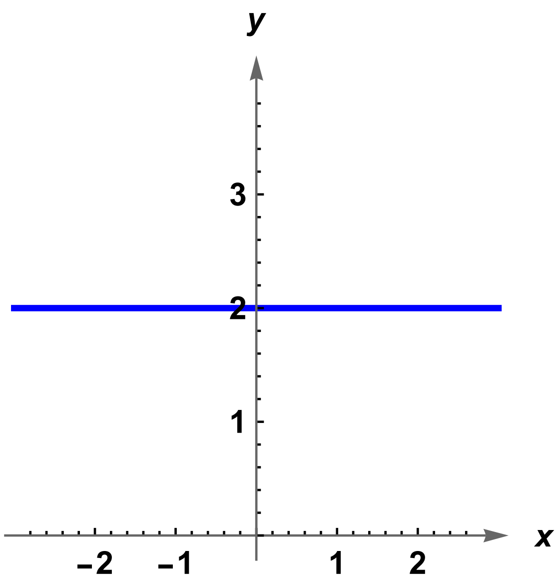
1) No eixo horizontal x marcamos o valor da variável independente x

2) No eixo vertical y marcamos os valores da imagem da função $f(x)$

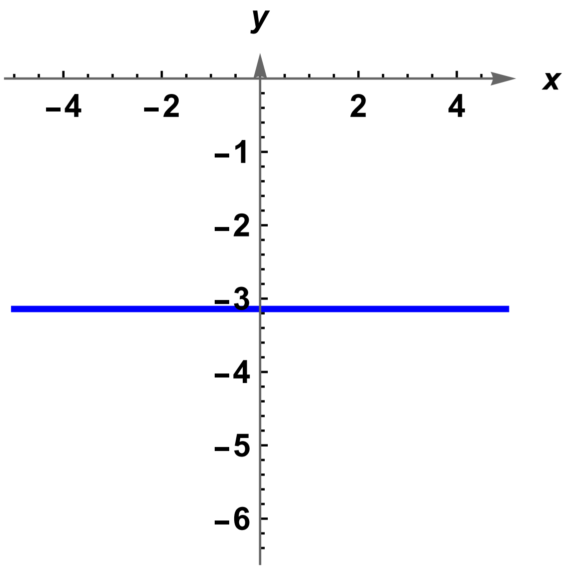
- Para esboçar um gráfico à mão, montamos primeiro uma tabela de valores.

Gráficos das Funções Constantes – Exemplos

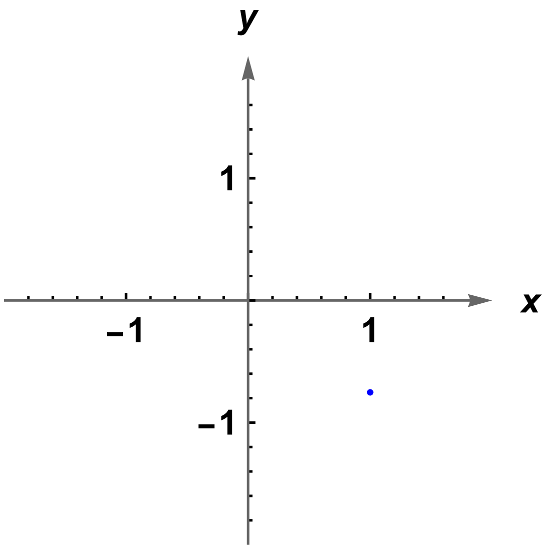
Exemplo a)



Exemplo b)

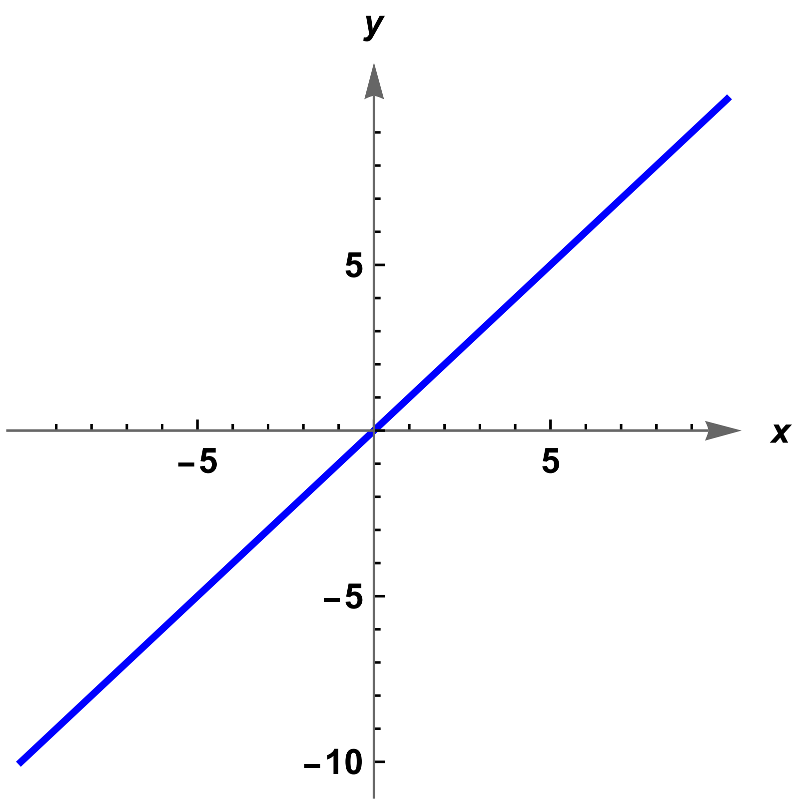


Exemplo c)

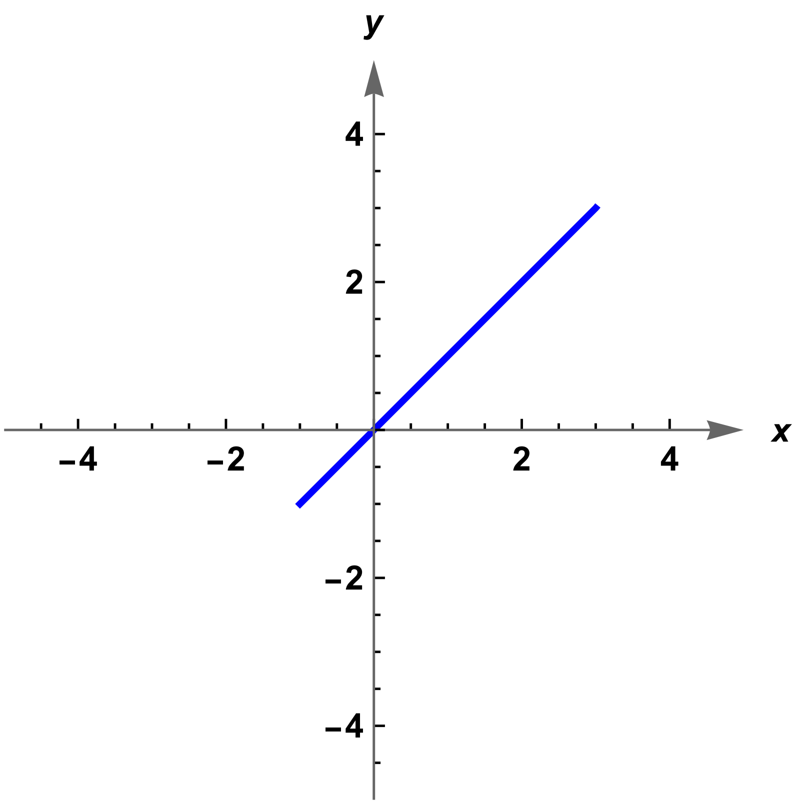


Gráficos das Funções Identidade – Exemplos

Exemplo a)



Exemplo b)



As Funções Polinomiais

- Nas próximas aulas, você estudará vários tipos de funções.

- O próximo passo após a identidade, para complicar só um pouco ...

- ... são as funções polinomiais, ou seja, as funções cuja expressão $f(x)$ é um polinômio em x.

- São classificadas de acordo com o grau.

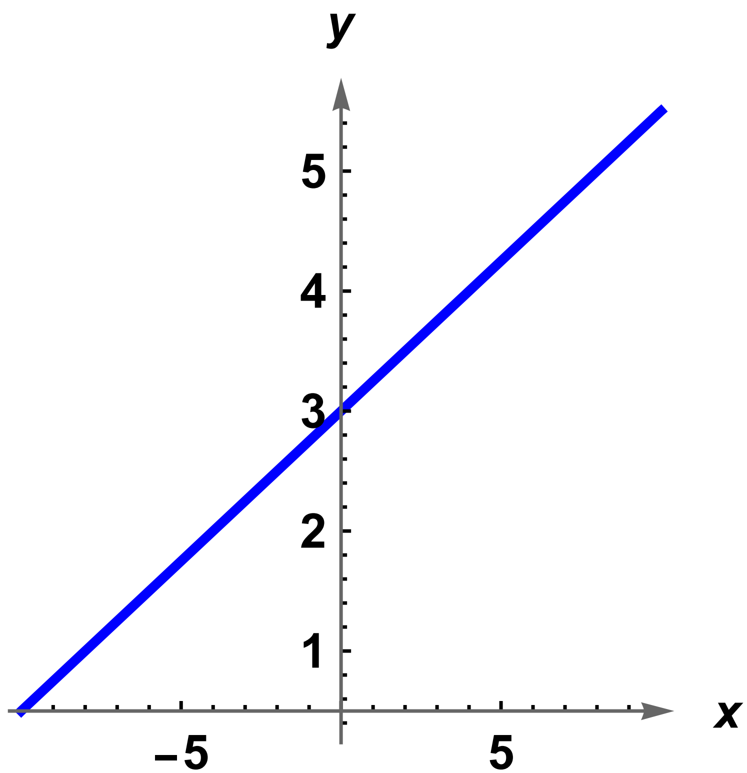
- Vamos exemplificar algumas, através da construção de seu gráfico.

Exemplo: Gráfico de uma Função Polinomial do Primeiro Grau

- Preenchendo a Tabela ao lado, esboce num plano cartesiano o gráfico da função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x}{4} + 3$$

x	$f(x)$
-8	
-4	
0	
4	
8	



Exercício: Gráfico de uma Função Polinomial do Primeiro Grau

- Preenchendo a Tabela ao lado, esboce num plano cartesiano o gráfico da função $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

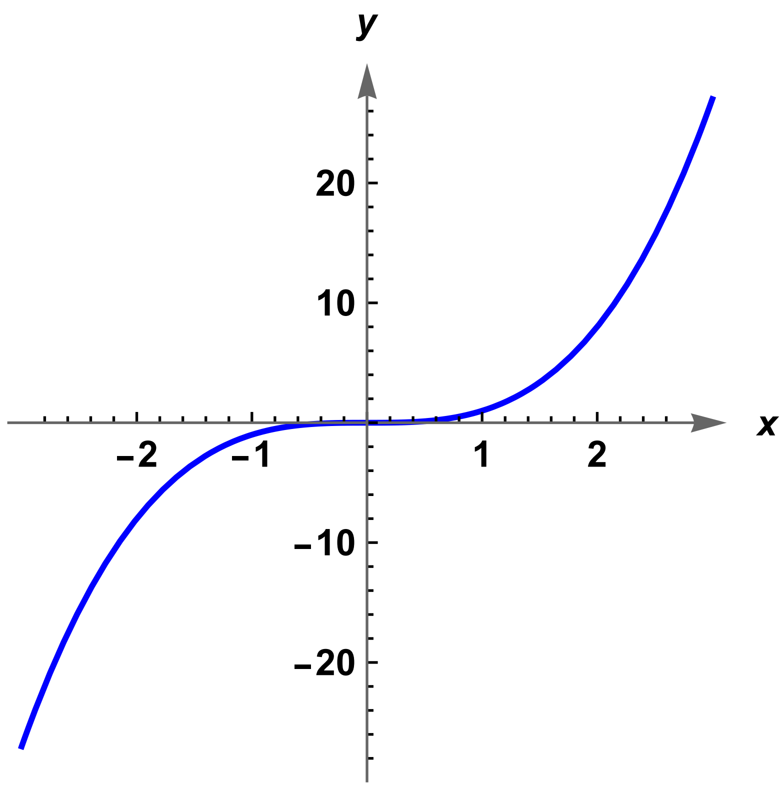
$$g(x) = 3x - 5$$

x	$g(x)$
-2	
-1	
0	
1	
2	

Exemplo: Gráfico de uma Função Polinomial do Terceiro Grau

- Preenchendo a Tabela ao lado, esboce num plano cartesiano o gráfico da função $h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = x^3$$



x	$h(x)$
-2	
-1	
0	
1	
2	

Exercício: Gráfico de uma Função Polinomial do Terceiro Grau

- Preenchendo a Tabela ao lado, esboce num plano cartesiano o gráfico da função $u: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$u(x) = x^3 - 2x + 1$$

x	$u(x)$
-2	
-1	
0	
1	
2	

Identificando o Domínio de uma Função

- Em muitos momentos, o interessante é identificar qual é o domínio maior possível para definir uma função real.

- Por exemplo, suponhamos que queremos definir uma função através da expressão abaixo:

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$$

- Nosso anseio é definir ela em toda a reta, mas isso só não é possível porque não podemos escolher $x = 4$, pois isto anularia o denominador.

- Logo, o maior domínio possível é $\mathbb{R} - \{4\}$, onde fizemos a diferença de conjuntos, ou seja, o conjunto $\mathbb{R}$ excluindo o número 4.

Identificando o Domínio de uma Função

- Dessa forma, podemos definir

$$f: \mathbb{R} - \{4\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

- Pela expressão

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$$

- Sem que isso leve a um problema.

- Curioso é que esta função pode ser simplificada, mas isso só pode ser feito porque já excluímos a possibilidade de x ser igual a 4.

- Para $x \neq 4$, temos:

$$f(x) = x + 4$$

E agora, como fica o gráfico dessa função?

Identificando o Domínio de uma Função

- Identifique qual o domínio máximo para as funções reais abaixo, considerando sempre o conjunto dos números reais como referência, como no exemplo anterior.

$$a)\ f(x) = \frac{x^2-16}{x+4}$$

$$b)\ g(x) = \frac{x^2-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$$

$$c)\ h(x) = \frac{x^2-2x+1}{x-1}$$

$$d)\ u(x) = \frac{x+6}{x^2-36}$$

Identificando a Imagem de uma Função

- O conjunto Imagem de uma função, representado por

$$Im(f) \quad \text{ou} \quad Im_f$$

- É o subconjunto do contradomínio formado pelos valores efetivamente atingidos da função.

- Ou seja, é como se "coletássemos" todos os valores $f(x)$ da função. No final, temos a imagem.

- Assim como nosso reflexo no espelho forma nossa imagem, que está dentro do espelho maior, que é o contradomínio.

Exemplos

- Determine a Imagem das Funções dos Exemplos anteriores.

Referências

- B.B. Filho, C.X. da Silva. *Matemática, Aula por Aula*. Editora FTD.

- G. Iezzi, C. Murakami. *Fundamentos de Matemática Elementar, 1: conjuntos, funções*. 8.ed. Atual Editora, São Paulo, 2011.