Universidade Federal do Pará
Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Faculdade de Física

# Espaço Vetorial e Combinações Lineares

Prof. Isaac Torres
https://itsufpa.wixsite.com/prof-isaac-torres

# Parte I

# Espaços Vetoriais

# O Conceito de Operação

- Uma operação é uma forma de combinar dois elementos de um mesmo conjunto ...
- ... resutando em um elemento do mesmo conjunto.
- Você faz isso há muito tempo:

$$2 + 6 = 8$$

**Soma de números naturais**

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{-6} = -\frac{1}{3}$$

**Produto de números racionais**

$$\pi^2 - \sqrt{2}$$

**Soma de números reais**

$$(2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}) + (-3\hat{\imath} + 9\hat{\jmath}) = -\hat{\imath} + 13\hat{\jmath}$$

**Soma de vetores**

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 12 \\ 15 & -15 \end{pmatrix}$$

**Produto de matrizes $2 \times 2$**

# O Conceito de Operação

- O que há de comum em todos os exemplos?

- Temos sempre um conjunto $A$ onde “moram” os elementos:

$2+6=8$ — Soma de números naturais → Soma de elementos do conjunto $\mathbb{N}$

$\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{-6}=-\frac{1}{3}$ — Produto de números racionais → Produto de elementos do conjunto $\mathbb{Q}$

$\pi^2-\sqrt{2}$ — Soma de números reais → Soma de elementos do conjunto $\mathbb{R}$

# O Conceito de Operação

- O que há de comum em todos os exemplos?

- Temos sempre um conjunto $A$ onde "moram" os elementos:

$$(2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}) + (-3\hat{\imath} + 9\hat{\jmath}) = -\hat{\imath} + 13\hat{\jmath}$$

**Soma de vetores** → **Soma de elementos do conjunto $\mathbb{R}^2$**

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 12 \\ 15 & -15 \end{pmatrix}$$

**Produto de matrizes $2 \times 2$** → **Produto de elementos do conjunto $M(2,2)$**

# O conceito Formal de Operação

- Nos exemplos anteriores, sempre temos **dois elementos** sendo combinados em um **conjunto** $A$.

- Somar vetores não é o mesmo que somar números, são **operações distintas.**

- Multiplicar números não é o mesmo que multiplicar números, são **operações diferentes.**

- Mas sempre podemos representar uma operação por um **símbolo genérico**

$$*$$

- Na notação de soma, usamos $+$ em vez de $*$; na notação de produto, $\cdot$ ou algo parecido, ou mesmo nada, apenas a justaposição dos elementos.

# Pausa: o Produto Cartesiano

- Um par ordenado

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

**Par ordenado:**

**Formado por dois elementos**

- é um ente matemático capaz de “juntar” dois elementos $x$ e $y$ de dois conjuntos $A$ e $B$, mantendo uma **ordem** entre eles, de forma que ...

- ... $x$ é o primeiro e $y$ é o segundo, neste exemplo, sendo $x \in A$ e $y \in B$.

- O conjunto de todos os pares ordenados de elementos dessa forma é chamado produto cartesiano dos conjuntos $A$ e $B$ e é representado por:

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$$

**Produto cartesiano:**

**Conjunto produto de outros dois conjuntos**

# O conceito Formal de Operação

- Todos os exemplos anteriores consistem em tomar dois elementos de um conjunto $A$, digamos, $x$ e $y$ e associar a eles um terceiro elemento (não necessariamente distinto deles), que é representado por

$$x * y$$

- Assim, a operação é, na verdade, uma função:

$$\overbrace{(x,y) \in A \times A} \xrightarrow{\text{Operação } *} \overbrace{x * y \in A}$$

# O conceito Formal de Operação

- Portanto:

- Uma **operação** $*$ em um conjunto $A$ é uma função

$$*: \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} \longrightarrow \boldsymbol{A}$$

- Exercício de compreensão: Volte aos exemplos do início e tente associar essa ideia com os exemplos.

# O Conceito de Estrutura Algébrica

- Uma operação dá uma estrutura matemática a um conjunto.

- A álgebra abstrata estuda operações e as propriedades de conjuntos munidos de operações.

- Dizemos que um par ordenado da forma

$$(A\ ,.*)$$

- ou seja, um conjunto e uma operação sobre ele, que satisfaz determinadas propriedades, é uma **estrutura algébrica**.

- Já vimos uma estrutura algébrica em aulas anteriores, a estrutura de *corpo*.

# O Conceito de Estrutura Algébrica

- Os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, como vimos, formam **corpos**, pois satisfazem 9 propriedades abaixo:

**Soma:**

i) $x+(y+z)=(x+y)+z$

ii) $x+y=y+x$

iii) $x+0=x$

iv) $-x+x=0$

**Produto:**

v) $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$

vi) $x\cdot y=y\cdot x$

vii) $x\cdot 1=x$

viii) Se $x\neq 0$, $x\cdot x^{-1}=1$

**Distributividade:** ix) $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$

- **Corpo** é um exemplo de estrutura algébrica. Um corpo é, grosso modo, um conjunto "bom" o suficiente para que se diga que seus elementos são **números**, ou seja, ***se comportam algebricamente como números***.

# Operações com Vetores

- Os vetores possuem um outro conjunto de propriedades.
- Consideremos os vetores do plano $\mathbb{R}^2$ como exemplo.
- Vamos representar os vetores desse plano por $\vec{u}$, $\vec{\mathrm{v}}$, $\vec{w}$ etc.
- Vamos representar os escalares, ou seja, os números reais, por letras gregas $\alpha, \beta, \gamma$ etc.
- Temos, por definição, o **vetor nulo**, que é $\vec{0} = 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} = (0,0)$.
- Para cada $\vec{u} = u_x\hat{\imath} + u_y\hat{\jmath}$, definimos o **oposto aditivo** de $\vec{u}$ como
$$-\vec{u} = -u_x\hat{\imath} - u_y\hat{\jmath}$$

# Operações com Vetores

- As operações de soma entre vetores $\vec{u} + \vec{v}$ e produto entre número e vetor $\alpha\vec{u}$ possuem as oito propriedades abaixo:

| | | |
|---|---|---|
| *i.* | $\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{u}} \quad \forall\, \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^2$ | Comutatividade da Soma |
| *ii.* | $(\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}) + \vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{u}} + (\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}})\ \forall\, \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^2$ | Associatividade da Soma |
| **iii.** | $\exists\, \vec{\mathbf{0}} \in \mathbb{R}^2$ **tal que** $\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{u}} \quad \forall\, \vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^2$ | Elemento Neutro da Soma |
| **iv.** | $\forall\, \vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^2\ \exists\, -\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^2$ **tal que** $\vec{\mathbf{u}} + (-\vec{\mathbf{u}}) = \vec{\mathbf{0}}$ | Elemento Oposto da Soma |
| **v.** | $\mathbf{1} \cdot \vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{u}} \quad \forall\, \vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^2$ | Elemento Neutro do Produto |
| vi. | $\alpha\,(\beta\,\vec{\mathbf{u}}) = (\alpha\,\beta)\,\vec{\mathbf{u}} \quad \forall\, \vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^2, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ | Associatividade do Produto |
| ***vii.*** | $(\alpha + \beta)\,\vec{\mathbf{u}} = \alpha\,\vec{\mathbf{u}} + \beta\,\vec{\mathbf{u}}\ \forall\, \vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^2, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ | Distributividade à Esquerda |
| viii. | $\alpha(\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}) = \alpha\vec{\mathbf{u}} + \alpha\vec{\mathbf{v}} \quad \forall\, \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^2, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ | Distributividade à Direita |

# O que significam essas propriedades?

- As propriedades anteriores são o que caracterizam um vetor como sendo um vetor.

- Cada uma dessas propriedades permite que os vetores desempenhem o seu papel devido na geometria, na física e na engenharia.

- Esse conjunto de propriedades das duas operações forma uma ***estrutura algébrica***!

- Essa estrutura algébrica é chamada **espaço vetorial**.

- O conjunto de todos os vetores do plano forma um espaço vetorial, que serve de modelo a todos os outros, por mais simples ou complicados que sejam.

# Operações com Matrizes

- Considere o conjunto $M(3,2)$, das matrizes $3 \times 2$, ou seja, com três linhas e duas colunas.

- Temos, então:

$$M(3,2) = \left\{ \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \\ m_{31} & m_{32} \end{bmatrix} \;;\; \text{onde } m_{ij} \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1,2,3 \qquad \forall j = 1,2. \right\} .$$

- Você pode verificar que o conjunto $M(3,2)$ satisfaz às mesmas 8 propriedades que os vetores do plano.

- Nesse sentido, o conjunto das matrizes dois por três, $M(3,2)$, forma um espaço vetorial.

- Embora seus elementos sejam matrizes, de natureza distinta dos vetores, eles compartilham da mesma estrutura, formando um espaço vetorial.

# Matriz Nula e Matriz Oposta

- O zero deste espaço é a **matriz nula**, 3 por 2:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- E, dada uma matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

- a sua **oposta** é a matriz

$$-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \\ -a_{31} & -a_{32} \end{pmatrix}$$

# Exemplo

- Mostre as propriedades i, iv e vii para o conjunto $M(3,2)$.

# Exercício

- Mostre as demais propriedades para o conjunto $M(3,2)$.

# As 8 Propriedades para o Conjunto $M(3,2)$

- Você pode verificar que o conjunto $M(3,2)$ satisfaz as 8 propriedades abaixo:

i. $\mathrm{A} + \mathrm{B} = \mathrm{B} + \mathrm{A} \;\; \forall\, \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{M}(3,2)$

*ii.* $(\mathrm{A} + \mathrm{B}) + \mathrm{C} = \mathrm{A} + (\mathrm{B} + \mathrm{C}) \; \forall\, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathrm{M}(3,2)$

iii. $\exists\, 0 \in \mathrm{M}(3,2)$ tal que $\mathrm{A} + 0 = \mathrm{A} \;\; \forall\, \mathrm{A} \in \mathrm{M}(3,2)$

iv. $\forall\, \mathrm{A} \in \mathrm{M}(3,2) \;\; \exists\, -\mathrm{A} \in \mathrm{M}(3,2)$ tal que $\mathrm{A} + (-\mathrm{A}) = 0$

v. $1 \cdot \mathrm{A} = \mathrm{A} \qquad \forall\, \mathrm{A} \in \mathrm{M}(3,2)$

vi. $\alpha\, (\beta\, \mathrm{A}) = (\alpha\, \beta)\, \mathrm{A} \quad \forall\, \mathrm{A} \in \mathrm{M}(3,2), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

*vii.* $(\alpha + \beta)\, \mathrm{A} = \alpha\, \mathrm{A} + \beta\, \mathrm{A} \; \forall\, \mathrm{A} \in \mathrm{M}(3,2), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

viii. $\alpha(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = \alpha \mathrm{A} + \alpha \mathrm{B} \quad \forall\, \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{M}(3,2), \forall \alpha \in \mathbb{R}$

- Portanto, podemos falar no **Espaço de Matrizes** 2 por 3, que é $M(2,3)$.

# A Estrutura Algébrica de Espaço Vetorial

- De forma mais geral, podemos dizer que um conjunto $V$ no qual se definem uma soma $+$ e um produto por escalar $\cdot$ , de tal forma que, para seus elementos sejam válidas as oito propriedades abaixo

| | | |
|---|---|---|
| i. | $u + v = v + u \quad \forall\, u, v \in V$ | Comutatividade da Soma |
| *ii.* | $(u + v) + w = u + (v + w) \; \forall\, u, v, w \in V$ | Associatividade da Soma |
| iii. | $\exists\, 0 \in V$ tal que $u + 0 = u \;\; \forall\, u \in V$ | Elemento Neutro da Soma |
| iv. | $\forall\, u \in V \;\; \exists \; -u \in V$ tal que $u + (-u) = 0$ | Elemento Oposto da Soma |
| v. | $1 \cdot u = u \quad \forall u \in V$ | Elemento Neutro do Produto |
| vi. | $\alpha\,(\beta\, u) = (\alpha\, \beta)\, u \quad \forall\, u \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ | Associatividade do Produto |
| *vii.* | $(\alpha + \beta)\, u = \alpha\, u + \beta\, u \; \forall\, u \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ | Distributividade à Esquerda |
| viii. | $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v \quad \forall\, u, v \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ | Distributividade à Direita |

- Então este espaço $(V, +, \;\cdot)$ é chamado um espaço vetorial (sobre o corpo $\mathbb{R}$).

# Já Temos Dois Exemplos

- O plano $\mathbb{R}^2$ e seus vetores
- O espaço das Matrizes 2 por 3
- Quantos mais existem?

# O Espaço $\mathbb{R}^3$ é um Espaço Vetorial

- Os vetores do espaço também possuem as mesmas propriedades!

- Lembre-se de que:

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{\, (x, y, z) \quad ; \quad x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

- É o conjunto dos vetores do espaço tridimensional.

- **Exercício:** Prove que $\mathbb{R}^3$ com as operações usuais é um espaço vetorial.
- O que significa esse exercício? Considere o vetor nulo do espaço, o oposto de um dado vetor, a definição de soma e de produto por escalar. Em seguida verifique as 8 propriedades uma a uma.

# O Espaço das Matrizes $7 \times 5$

- Uma matriz $7 \times 5$ é uma matriz com 7 linhas e 5 colunas. Exemplo:

$$\begin{pmatrix} -2 & 9 & 63 & -5 & 11 \\ 27 & -37 & 51 & 6 & 78 \\ 1 & 36 & 0 & 90 & 82 \\ 19 & \dfrac{1}{2} & 88 & 61 & 0 \\ 4 & -7 & 34 & -1 & 23 \\ 3 & -15 & 7 & e & -5 \\ 0 & 7 & \pi & 9 & 20 \end{pmatrix}$$

- Considere agora o conjunto $M(7,5)$ de todas as matrizes com 7 linhas e 5 colunas.

- Como podemos tornar este conjunto $M(7,5)$ um espaço vetorial?

# O Espaço das Matrizes $m \times n$

- Vamos adicionar mais uma camada de abstração.

- Agora, imagine $M(m,n)$, o conjunto de todas as matrizes com $m$ linhas e $n$ colunas.

- Então:

$$M(m,n) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \;\; ; \quad \text{onde } a_{ij} \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1, \ldots, m, \forall j = 1, \ldots, n. \right\}$$

- Como podemos tornar este conjunto um espaço vetorial?

- **Obs.:** Outra notação comum é $M(m \times n)$.

# Quais são os passos?

1. Definir a soma no espaço dado.

2. Definir como multiplicar por escalar.

3. Definir o elemento 0 do espaço.

4. Definir o oposto de um dado elemento.

5. Demonstrar a validade dos 8 axiomas de espaço vetorial.

# Funções Podem ser VETORES???

- Além dos espaços já vistos:
  - Vetores
  - Matrizes
- E além dos *próprios números formarem um espaço vetorial*, temos ...
- **... os espaços vetoriais de funções.**
- Podemos **somar** funções e **multiplica-las por escalar** de forma que elas tenham as **mesmas propriedades algébricas que os vetores e as matrizes**!

# O Espaço (Vetorial) das Funções $\boldsymbol{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

- Dadas duas funções

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

- definimos a **soma $\boldsymbol{f + g}$** como sendo a função $f + g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

- ou seja, a função soma é a função que soma os valores das duas funções para cada valor de $x$ do domínio.

# O Espaço (Vetorial) das Funções $\boldsymbol{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

- Dada uma função

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

- e um número real $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos o **produto $\boldsymbol{\alpha f}$** como sendo a função $\alpha f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$$

- ou seja, a função produto por escalar é a função que multiplica o valor da função em cada ponto pelo escalar $\alpha$.

# O Espaço (Vetorial) das Funções $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

- A **função nula** é a função (representada também por 0)

$$0: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

- definida por

$$0(x) = 0$$

- ou seja, a função nula $0: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função que associa a cada número real $x$ o número zero.

# O Espaço (Vetorial) das Funções $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

- A **função oposta** a uma dada função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é

$$-f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

- definida por

$$(-f)(x) = -f(x)$$

- ou seja, a função oposta é simplesmente definida como associando a cada valor $x$ o valor oposto ao associado pela função $f$.

# As 8 Propriedades para o Conjunto $F\ (\mathbb{R}, \mathbb{R})$

- Você pode verificar que o conjunto $F\ (\mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisfaz as 8 propriedades abaixo:

i. $f + g = g + f \ \forall\, f, g \in F\ (\mathbb{R}, \mathbb{R})$

*ii.* $(f + g) + h = f + (g + h)\ \forall\, A, B, C \in F\ (\mathbb{R}, \mathbb{R})$

iii. $\exists\ 0 \in F\ (\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tal que $f + 0 = A \ \ \forall\, f \in F\ (\mathbb{R}, \mathbb{R})$

iv. $\forall\, f \in M(2{,}3)\ \ \exists\ -f \in F\ (\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tal que $f + (-f) = 0$

v. $1 \cdot f = f \quad \forall\, f \in F\ (\mathbb{R}, \mathbb{R})$

vi. $\alpha\,(\beta\, f) = (\alpha\, \beta)\, f \quad \forall\, f \in F\ (\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

*vii.* $(\alpha + \beta)\, f = \alpha\, f + \beta\, f\ \forall\, f \in F\ (\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

viii. $\alpha(A + B) = \alpha\, f + \alpha\, g \quad \forall\, f, g \in F\ (\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall \alpha \in \mathbb{R}$

- Portanto, podemos falar no **Espaço das Funções Reais**, que é $F\ (\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

# Resumindo ...

- Vimos que os vetores tem uma estrutura algébrica, chamada **espaço vetorial**.

- Vimos que essa estrutura pode ser encontrada em *outros conjuntos*, que não são vetores, mas se **comportam algebricamente como os vetores**.

- Juntando todos os exemplos, temos os seguintes espaços vetoriais:

  ✓ O próprio conjunto dos números reais $\mathbb{R}$.

  ✓ Os vetores do plano $\mathbb{R}^2$ e do espaço $\mathbb{R}^3$.

  ✓ O espaço $M(m,n)$ das matrizes de uma ordem definida $m \times n$.

  ✓ O espaço das funções reais $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

# Parte II

# Combinações Lineares

# Combinação Linear de Dois Vetores

- As operações de produto por escalar e soma podem ser combinadas.

- Assim, podemos combinar dois ou mais vetores, obtendo a chamada combinação linear.

- **Exemplo:** dados os vetores do espaço:

$$\vec{u} = -2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - \hat{k} \qquad \text{e} \qquad \vec{\mathrm{v}} = 4\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 5\hat{k}$$

- Faça as combinações lineares abaixo:

*a)* $2\vec{u} - 3\vec{\mathrm{v}}$

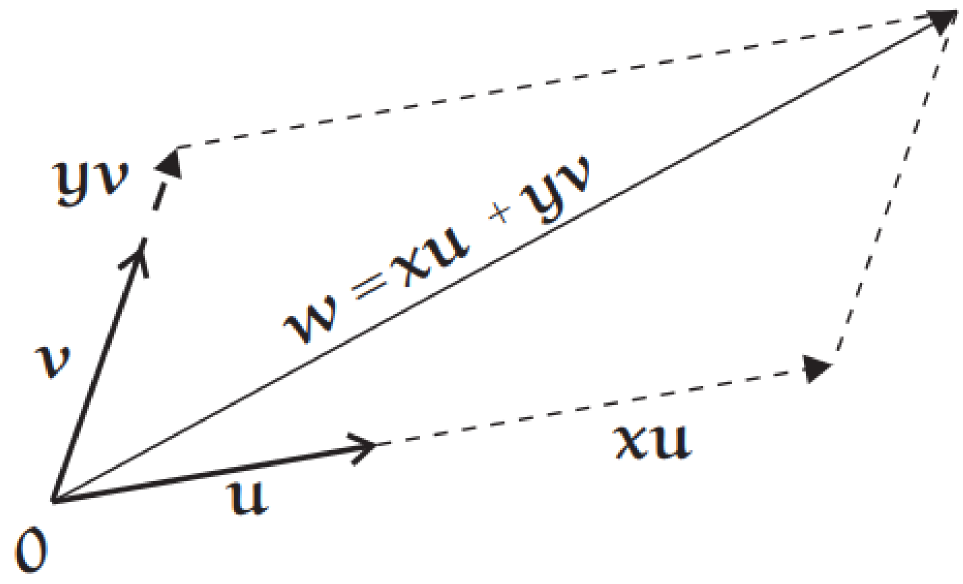
*b)* $-\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{\mathrm{v}}$

*c)* $4\vec{u} + 6\vec{\mathrm{v}}$

*d)* $-\frac{2}{3}\vec{u} - \frac{1}{4}\vec{\mathrm{v}}$

# Interpretação Geométrica da Combinação Linear

- A figura abaixo ilustra uma combinação linear de vetores u e v.
- Variando os valores dos escalares x e y, obtemos diferentes combinações lineares $w = xu + y$v.



# Exemplo

a) Represente os vetores abaixo num plano cartesiano:

$$\vec{u} = \hat{\imath} + 3\hat{\jmath} \qquad \text{e} \qquad \vec{\mathrm{v}} = 4\hat{\imath} + \hat{\jmath}$$

b) Depois, determine a combinação linear

$$\vec{w} = 3\vec{u} + 2\vec{\mathrm{v}}$$

c) A seguir, determine essa combinação geometricamente e compare os resultados.

# Exercício

a) Represente os vetores abaixo num plano cartesiano:

$$\vec{u} = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} \qquad \text{e} \qquad \vec{\mathrm{v}} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$$

b) Depois, determine a combinação linear

$$\vec{w} = 5\vec{u} + 4\vec{\mathrm{v}}$$

c) A seguir, determine essa combinação geometricamente e compare os resultados.

# Combinação Linear de Vários Vetores

- Podemos fazer combinações com **três ou mais** vetores.

- **Exemplo**. Considere os vetores no espaço:

$$\vec{u} = -2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - \hat{k} \quad , \quad \vec{\mathrm{v}} = 4\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 5\hat{k} \quad \text{e} \quad \vec{w} = 3\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}$$

- Determine as cominações lineares abaixo:

*a)* $2\vec{u} - 3\vec{\mathrm{v}} + \vec{\mathrm{w}}$

*b)* $-\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{\mathrm{v}} - 2\vec{\mathrm{w}}$

*c)* $4\vec{u} + 6\vec{\mathrm{v}} + 5\vec{\mathrm{w}}$

*d)* $-\frac{2}{3}\vec{u} - \frac{1}{4}\vec{\mathrm{v}} + \frac{4}{3}\vec{\mathrm{w}}$

# Combinando Matrizes

- O conceito de combinação linear não se aplica apenas a vetores do plano e do espaço, ...

- ... mas a *qualquer espaço vetorial!*

- Isso porque ele depende apenas das operações de soma e produto por escalar, que estão em qualquer espaço vetorial.

- Em particular, podemos fazer combinação linear de **matrizes**.

# Combinando Matrizes – Exemplo

- Considere as matrizes abaixo, do espaço $M(2,2)$:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad , \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

- Determine as combinações lineares abaixo:

*a)* $5A - 3B + C$

*b)* $-4C + 3B$

*c)* $\frac{A+B-C}{2}$

*d)* $-\frac{1}{2}A + \frac{1}{3}C$

# Combinando Funções

- Como o espaço das funções $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ também é um espaço vetorial, podemos fazer combinações lineares de funções.

- Exemplo. Considere as funções $f, g, h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = -5x \qquad , \qquad g(x) = 2x^2 - 4x + 10 \quad \text{e} \quad h(x) = -2 + x^3$$

- Determine as combinações lineares abaixo:

*a)* $f + g + h$

*b)* $-\frac{4}{5}f + g + 5h$

*c)* $3f - 4g + 2h$

*d)* $\frac{1}{2}g - \frac{1}{4}f + \frac{2}{7}h$

# Definição Geral de Combinação Linear

**Definição** *(Combinação Linear).* Dado um espaço vetorial $V$, e dados os números reais $c_1, c_2, \ldots, c_n$ e os vetores $u_1, u_2, \ldots, u_n$, chama-se combinação linear ao vetor

$$\mathrm{v} = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n$$

Neste caso, dizemos que v pode ser expresso como combinação linear dos vetores $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

# Expressando um Vetor como Combinação Linear de Outros Vetores

- **Exemplo 1.** No espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, considere os vetores

$$\vec{u} = \hat{\imath} + 3\hat{\jmath} \qquad \text{e} \qquad \vec{\mathrm{v}} = 4\hat{\imath} + \hat{\jmath}$$

- Como podemos descobrir se é possível expressar o vetor

$$\vec{w} = -5\hat{\imath} + 8\hat{\jmath}$$

- como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{\mathrm{v}}$?
- O mesmo pode ser feito com os vetores abaixo?

*a)* $6\hat{\imath} + 6\hat{\jmath}$

*b)* $37\hat{\imath}$

*c)* $-10\hat{\jmath}$

# Expressando um Vetor como Combinação Linear de Outros Vetores

- **Exemplo 2.** No espaço vetorial $M(2\times 2)$:

$$A=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

- Verifique se é possível expressar as matrizes abaixo como combinação de A e B:

*a)* $C=\begin{pmatrix}-10 & 5\\ 5 & 6\end{pmatrix}$

*b)* $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

*c)* $D=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 2 & -7\end{pmatrix}$

*d)* $E=\begin{pmatrix}20 & -15\\ -10 & -9\end{pmatrix}$

# Expressando um Vetor como Combinação Linear de Outros Vetores

- **Exemplo 3.** No espaço das funções $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, considere as funções definidas pelas expressões abaixo:

$$f_0(x) = 1 \quad , \quad f_1(x) = x \quad , \quad f_2(x) = x^2 \quad , \quad f_3(x) = x^3$$

- Determine se as funções em $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ abaixo podem ser escritas como combinações lineares das funções $f, g, h$ acima.

*a)* $f(x) = 14 - 15x + 2x^2 - 2x^3$

*b)* $g(x) = -1 - 2x^3$

*c)* $h(x) = 50 - 5\mathrm{x}^2 + 9\mathrm{x}^3 - 4\mathrm{x}$

# Expressando um Vetor como Combinação Linear de Outros Vetores

- **Exemplo 3.** No espaço das funções $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, considere as funções definidas pelas expressões abaixo:

$$f_1(x) = -5x \quad , \qquad f_2(x) = 2x^2 + 10 \qquad \text{e} \qquad f_3(x) = -2 + x^3$$

- Determine se as funções em $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ abaixo podem ser escritas como combinações lineares das funções $f, g, h$ acima.

*a)* $f(x) = 14 - 15x + 2x^2 - 2x^3$

*b)* $g(x) = -1 - 2x^3$

*c)* $h(x) = 50 - 5\mathrm{x}^2 + 9\mathrm{x}^3 - 4\mathrm{x}$

# Referências


- Paulo Winterle. **Vetores e Geometria Analítica.** 2ª edição, Editora Pearson, 2014.

- É um livro de geometria analítica, não de álgebra linear. Porém, supõe-se que ao estudar álgebra linear se tem o conhecimento dos 4 primeiros capítulos desse livro, então é importante como um estudo inicial prévio.


- Howard Anton, Chris Rorres. **Álgebra Linear com Aplicações.** 10ª edição, Editora Bookman, 2012.

- Tradução do inglês, mas é um excelente livro, com excelente didática que cobre a ementa de álgebra linear da ufpa.

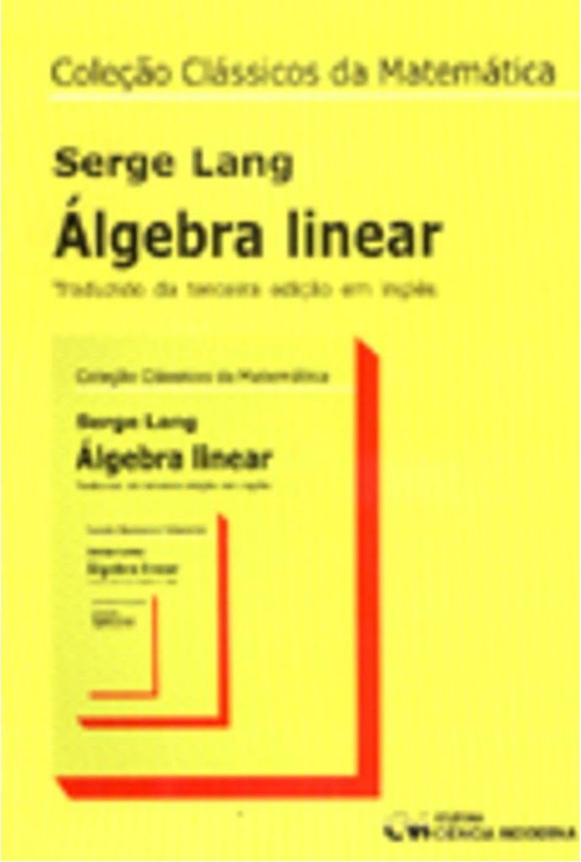

- Carlos A. Callioli, Higino H. Domingues, Roberto C.F. Costa. **Álgebra Linear e Aplicações**, 6ª edição, Atual Editora.

- Referência em português bastante acessível e com vários exemplos, pode ser usada como livro-texto da disciplina.

# Referências Avançadas

- Serge Lang. **Álgebra Linear**. Coleção Clássicos da Matemática. Editora Ciência Moderna.

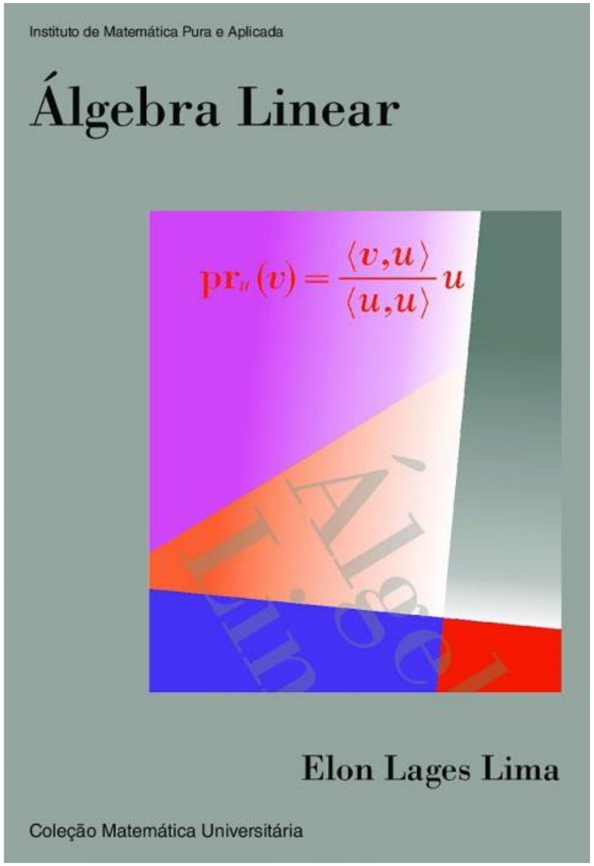
- Este livro é consideravelmente mais avançado que os anteriores e não é recomendável para uma disciplina introdutória. Ele é mais "matemático," o que significa que se aprofunda mais em aspectos teóricos e em tópicos geralmente reservados a disciplinas de fim de graduação em matemática ou mestrado em matemática. Porém, possui muitos tópicos que podem ser úteis para Física. Os Capítulos V, VII e VIII são especialmente úteis para Mecânica Quântica. O prof. Serge Lang tem muitos livros de álgebra (não só linear), cálculo e análise, para quem tiver interesse. Infelizmente, poucos foram traduzidos para o português.



# Referências Avançadas

- Elon Lages Lima, **Álgebra Linear**. Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2014.

- Este livro é uma referência completa em álgebra linear. Cobre não só o conteúdo de nossa disciplina, como também tópicos mais computacionais (decomposição de matrizes e outros, Capítulos 17 e 22), tópicos mais avançados que são muito úteis em Mecânica Quântica (Capítulos 11 e 21, respectivamente, sobre adjunta e espaços complexos). Ele não é adequado ao início de um curso de graduação, pois apresenta uma linguagem bastante compacta e abstrata. Apesar disso, é um excelente texto, tendo inclusive ganhado o prêmio Jabuti em 1996. Sendo assim, pode ser uma segunda ou terceira leitura ao(à) leitor(a) interessado(a) em se aprofundar no assunto, e adquirir um aprendizado mais sólido em matemática.



# Contatos

Instagram: @isaac.física

Site: https://itsufpa.wixsite.com/prof-isaac-torres

Email: itsufpa@gmail.com